

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ: «ΕΝΤΑΞΗ ΤΣΙΓΓΑΝΟΠΑΙΔΩΝ ΣΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ»

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

*ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΑΣΚΑΛΟΥ*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ  
ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ Α, Β, Γ

ΒΟΛΟΣ 2007

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

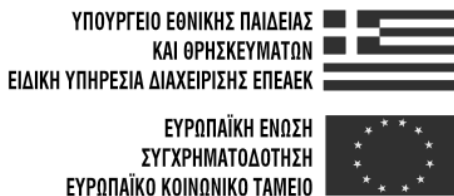
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ: «ΕΝΤΑΞΗ ΤΣΙΓΓΑΝΟΠΑΙΔΩΝ ΣΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ»**

# **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΑΣΚΑΛΟΥ

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ  
ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ  
ΣΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ**

ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ Α, Β, Γ



**Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ**  
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Εκπαίδευσης και Αρχικής  
Επαγγελματικής Κατάρτισης

## **ΕΠΕΑΕΚ - Γ' ΚΠΣ**

### **Άξονας 1**

### **Μέτρο 1.1**

### **Ενέργεια 1.1.1**

Προγράμματα Ένταξης των Παιδιών με Πολιτισμικές και Γλωσσικές Ιδιαιτερότητες στο Εκπαιδευτικό Σύστημα

**Πρόγραμμα:** «Ένταξη Τσιγγανοπαίδων στο Σχολείο»

**Χρηματοδότηση:** Ευρωπαϊκή Ένωση - ΕΚΤ,

Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων

**Φορέας Παρακολούθησης:** ΥΠΕΠΘ, Ειδική Γραμματεία Π.Ο.Δ.Ε.

Ειδική Γραμματέας: Ισμ. Κριάρη, Διεύθυνση Γ' ΚΠΣ

**Φορέας Υλοποίησης:** Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου,  
Αργοναυτών και Φιλελλήνων, 382 21 Βόλος

Website: [www.roma.uth.gr](http://www.roma.uth.gr)

**Επιστημονικός Υπεύθυνος:** Ναπολέων Μήτσης

**Υπεύθυνος Υποέργου:** Δημήτριος Μπενέκος

**Επιστημονική Επιμέλεια:** Δέσποινα Πόταρη, Χαράλαμπος Σακονίδης,

Κωνσταντίνος Σδρόλιας, Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης

**Ομάδα Συγγραφής:** Βαρβάρα Γεωργιάδου-Καμπουρίδη, Χρήστος Μαρκόπουλος

**Γλωσσική και Φιλολογική Επιμέλεια:** Βαρβάρα Γεωργιάδου-Καμπουρίδη

**ISBN:** 978-960-6774-05-8

Εκδοτική Παραγωγή



**ΕΠΤΑΛΟΦΟΣ Α.Β.Ε.Ε.**

Αρδηττού 12-16, 116 36 Αθήνα

Τηλ.: 210.921.7513, 210.921.4820 • Fax: 210.923.7033

[www.eptalofos.gr](http://www.eptalofos.gr) • e-mail: [info@eptalofos.gr](mailto:info@eptalofos.gr)

# Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	5
Ο ρόλος του εκπαιδευτικού υλικού.....	6
Ο ρόλος του μαθητή και της μαθήτριας.....	7
Ο ρόλος του εκπαιδευτικού .....	8
Η δομή του νέου εκπαιδευτικού υλικού .....	8
Τρόπος διεξαγωγής του μαθήματος χρησιμοποιώντας το νέο εκπαιδευτικό υλικό ..	11
Αναλυτική Περιγραφή των Διδακτικών Ενοτήτων.....	13

## Πρώτο επίπεδο

Δραστηριότητες με χρήση των ράβδων του Cuisenaire .....	15
Δραστηριότητες με τα ανθρωπάκια .....	19
Δραστηριότητες με ντόμινο .....	20
Παιχνίδια και προβλήματα στον πίνακα 1-100 .....	22
Δραστηριότητες με το γεωπίνακα .....	23
Δραστηριότητες με το Τάνγκραμ.....	25
Δραστηριότητες με τα πεντόμινο .....	28
Προβλήματα με εικόνες, αριθμούς και λόγια .....	31

## Δεύτερο επίπεδο

Δραστηριότητες με το γεωπίνακα (μέρος Α) .....	33
Δραστηριότητες με τα πεντόμινο .....	35
Δραστηριότητες με το Τάνγκραμ (μέρος Α).....	38
Δραστηριότητες με το γεωπίνακα (μέρος Β) .....	42
Δραστηριότητες με τα pattern blocks .....	44

Δραστηριότητες με ράβδους του Cuisenaire (μέρος Α) .....	47
Δραστηριότητες με το Τάνγκραμ (μέρος Β) .....	52
Δραστηριότητες με ντόμινο .....	57
Δραστηριότητες με ράβδους του Cuisenaire (μέρος Β) .....	58
Προβλήματα .....	59

### **Τρίτο Επίπεδο**

Δραστηριότητες με πεντόμινο .....	73
Δραστηριότητες με Τάνγκραμ .....	75
Δραστηριότητες στα κλάσματα με χρήση πολλαπλών μοντέλων αναπαράστασης..	76
Δραστηριότητες με το γεωπίνακα .....	82
Προβλήματα με σχήματα, λόγια και αριθμούς .....	83
Βιβλιογραφία .....	87

## Εισαγωγή

Η φιλοσοφία του νέου εκπαιδευτικού υλικού που προτείνεται με βιβλία των τριών επιπέδων βασίζεται ακριβώς στη δημιουργία πλούσιων περιβαλλόντων μάθησης μέσα από τη χρήση διδακτικών υλικών. Τα νέα σχολικά εγχειρίδια δεν στοχεύουν στο να αντικαταστήσουν ή να συμπληρώσουν τα εγχειρίδια της πρωινής ζώνης, αλλά κυρίως στο να προσφέρουν στα παιδιά και τους εκπαιδευτικούς ένα πλαίσιο δραστηριοτήτων για τη διερεύνηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών.

Η χρήση των διδακτικών υλικών και εργαλείων θεωρούμε ότι αποκτά κυρίαρχο ρόλο στη διαμόρφωση των κατάλληλων πλαισίων συμφραζομένων (contexts) προκειμένου να μελετηθούν οι ενέργειες και οι αντιλήψεις των παιδιών σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες. Όπως υποστηρίζει όμως ο Bauersfeld (1995), τα διδακτικά υλικά καθαυτά και οι ιδιότητές τους δε συντελούν από μόνα τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Αντίθετα, θεωρούμε ότι οι φυσικές ενέργειες των παιδιών πάνω σε αυτά, η αλληλεπίδραση μεταξύ τους αλλά και οι αναστοχαστικοί συλλογισμοί πάνω στις ενέργειες αυτές συμβάλλουν στην κατασκευή ή και ανακατασκευή νοητικών σχημάτων και λειτουργιών των παιδιών (Markopoulos & Potari 1999).

Η σχολική τάξη αποτελεί ένα πολύπλοκο κοινωνικό περιβάλλον, στο πλαίσιο του οποίου λαμβάνει χώρα η διαδικασία της μάθησης. Η πολυπλοκότητα της σχολικής τάξης περιλαμβάνει την κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ όλων των συμμετεχόντων στη μαθησιακή διαδικασία, δηλαδή του εκπαιδευτικού και των παιδιών. Από την άλλη μεριά, καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση του κοινωνικού περιβάλλοντος της τάξης έχει και η αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων με τα διδακτικά υλικά αλλά και με το αναλυτικό πρόγραμμα. Έτσι, οι δραστηριότητες και ο τρόπος με τον οποίο αυτές εξελίσσονται και προσαρμόζονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, οι ενέργειες του εκπαιδευτικού μέσα από τις ερωτήσεις που θέτει, η αλληλεπίδρασή του με τα παιδιά και ο τρόπος με τον οποίο τα τελευταία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους είναι στοιχεία που συντελούν στη διαμόρφωση του μαθησιακού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη.

Παράλληλα με τη δημιουργία του κοινωνικού περιβάλλοντος που διαμορφώνεται, η ατομική γνωστική ανάπτυξη του κάθε παιδιού παραμένει στο επίκεντρο της διδακτικής-μαθησιακής διαδικασίας. Σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική θεώρηση, οι ενέργειες των παιδιών και η ενασχόλησή τους με τα διδακτικά εργαλεία κατέχουν κυρίαρχη θέση στην εξέλιξη των αντιλήψεών τους. Επιπλέον, οι αναστοχαστικοί αφαιρετικοί συλλογισμοί των ενεργειών οδηγούν στην κατασκευή ανεπτυγμένων νοητικών σχημάτων (Confrey 1995).

Κάθε ενότητα του εγχειριδίου περιλαμβάνει μια σειρά από δραστηριότητες όπου το παιδί καλείται να αλληλεπιδράσει με το διδακτικό υλικό, τον εκπαιδευτικό αλλά και τους συμμαθητές του. Ο στόχος του εκπαιδευτικού δεν είναι "να διδάξει" μια μαθηματική έννοια, αλλά κυρίως μέσα από τις ενέργειες των παιδιών να διερευνήσει αλλά και να εξελίξει τις αντιλήψεις τους σχετικά

με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Μολονότι, οι ενότητες αντιστοιχούν από τις γνωστικές περιοχές του αναλυτικού προγράμματος (Αριθμοί και πράξεις, Γεωμετρία, κ.λπ.), το μαθηματικό περιεχόμενο καθεμιάς από τις δραστηριότητες δεν χαρακτηρίζεται μόνο από τη γνωστική περιοχή της ενότητας, αλλά κυρίως από τη χρήση του διδακτικού υλικού που περιλαμβάνει. Όπως το κάθε διδακτικό υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία-μάθηση περισσότερων μαθηματικών εννοιών, έτσι και οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται σε κάθε ενότητα είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν για τη διερεύνηση και εξέλιξη των αντιλήψεων των παιδιών σχετικά με διαφορετικές μαθηματικές έννοιες.

## Ο ρόλος του εκπαιδευτικού υλικού

Η Szendrei (1996) μέσα από μια ιστορική ανασκόπηση της χρήσης του διδακτικού υλικού από την αρχαιότητα μέχρι τον 20ο αιώνα, διακρίνει δύο κυρίως είδη διδακτικού υλικού: Τα συγκεκριμένα υλικά ή αλλιώς “κοινά εργαλεία” που είναι εργαλεία της καθημερινής ζωής και χρησιμοποιούνται στην τάξη για εκπαιδευτικούς σκοπούς και τα (διδακτικά) υλικά που φτιάχνονται για αποκλειστική χρήση στο σχολείο. Ως μια τρίτη κατηγορία διδακτικού υλικού μπορούμε να θεωρήσουμε και τα παιχνίδια που εισήλθαν στην τάξη τα τελευταία χρόνια.

Ωστόσο η χρήση του διδακτικού υλικού είχε και έχει τον αντίλογό της. Ο Paolo Boero και η ομάδα των εκπαιδευτικών που συμμετείχε στο project της Γένοβας κράτησε μια ριζοσπαστική στάση απέναντι στη χρήση του διδακτικού υλικού στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση (βλ. Szendrei 1996) εξοστρακίζοντάς το από την τάξη. Αντί αυτού οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στο project χρησιμοποιούσαν κοινά εργαλεία, όπως για παράδειγμα ημερολόγια, χρήματα, θερμόμετρα, χάρακες, χάρτες, αριθμομηχανές τσέπης, ή γεγονότα, όπως η σκιά, οι κατασκευές και τα προπλάσματα, όπως, για παράδειγμα, μια μακέτα του σχολικού κτιρίου. Θεωρούσαν ότι αυτά τα εργαλεία λειτουργούν ως μέσα που εξυπηρετούν το σκοπό της ενεργούς μάθησης των παιδιών.

Οι λόγοι για τους οποίους δεν χρησιμοποιούν διδακτικό υλικό αλλά “κοινά εργαλεία” της καθημερινής ζωής είναι οι ακόλουθοι:

1. Θεωρούν ότι τα κοινά εργαλεία βοηθούν τα παιδιά να συνδέσουν τις έννοιες με τις εξωσχολικές εμπειρίες και να μεταφέρουν τη χρήση των μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις, ενώ αυτό δεν συμβαίνει όταν χρησιμοποιείται διδακτικό υλικό.
2. Θεωρούν ότι τα κοινά εργαλεία έχουν επιλεγεί μέσα από την πολιτιστική εξέλιξη του ανθρώπου και ακολουθούν την ιστορική δόμηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Ως εκ τούτου οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εκμεταλλεύονται τα εργαλεία ως διαμεσολαβητές ανάμεσα στις δυσκολίες που προέρχονται από την πραγματικότητα και τις νοητικές διεργασίες που αφορούν τα μαθηματικά.
3. Δαπανάται χρόνος για να μάθουν τα παιδιά να χειρίζονται το διδακτικό υλικό. Χρειάζεται λιγότερος χρόνος για να μάθουν να χειρίζονται τα κοινά εργαλεία -εφόσον είναι κοινά-, τα οποία εξάλλου είναι απαραίτητο να μάθουν και για τις εξωσχολικές τους συναλλαγές.
4. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κάνει κακή χρήση του διδακτικού υλικού, ενώ από την άλλη τόσο οι γονείς όσο και οι εκπαιδευτικοί είναι εξαιρετικοί γνώστες της χρήσης κοινών εργαλείων.

Στο νέο εκπαιδευτικό υλικό που προτείνεται στα βιβλία των τριών επιπέδων περιλαμβάνονται δραστηριότητες που συνδυάζουν τόσο κοινά εργαλεία όσο και διδακτικό υλικό. Το εκπαιδευτικό υλικό δεν είναι από μόνο του φορέας μαθηματικής γνώσης και μάλιστα συγκεκριμένης, η οποία συνδέεται με ιδιότητες του υλικού. Ούτε αναμένεται να μάθουν τα παιδιά μαθηματικά επειδή θα κάνουν κάποιες δραστηριότητες με το εκπαιδευτικό υλικό. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το υλικό είναι ένα πρώτο βήμα στη διαδικασία της μάθησης. Ωστόσο η έρευνα έχει δείξει ότι αρκετές φορές η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού δεν παίζει μόνο το διαμεσολαβητικό ρόλο ανάμεσα στο “χειροπιαστό” και το “αφηρημένο” αλλά αποτελεί μια καλή ευκαιρία ανάδειξης και διαπραγμάτευσης πρότερων εμπειριών των παιδιών και εξέλιξης των εμπειριών αυτών σε γνώσεις. Άλλες φορές είναι δυνατόν να βοηθήσει το παιδί και τον εκπαιδευτικό σε μεταγνωστικές διαδικασίες μέσα από συνδέσεις διαφορετικών εννοιών που αναδύονται από διαφορετικές χρήσεις του ίδιου του υλικού, όπως για παράδειγμα με τις ράβδους του Cuisenaire που ο αριθμός που αντιστοιχεί σε μια ράβδο μπορεί να δηλώνει μήκος, ή να συνδέεται με μια μονάδα μέτρησης ή με μια ακέραια μονάδα όταν συζητούμε κλασματικές έννοιες.

## Ο ρόλος του παιδιού

Οι σύγχρονες θεωρίες μάθησης και ειδικότερα αυτές που αφορούν τη μάθηση των μαθηματικών υποστηρίζουν την εμπλοκή του παιδιού στη μαθησιακή διαδικασία με σκοπό να οικοδομήσει τη γνώση. Όσο μεγαλύτερη η συμμετοχή του παιδιού σε δραστηριότητες (κι αυτό μεταφράζεται σε περισσότερες ευκαιρίες που του δίνονται στην τάξη να εκφράσει τις σκέψεις του και να τις ανταλλάξει με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές του στην ομάδα του και με τον εκπαιδευτικό), τόσο βαθύτερα κατανοεί τις υπό διαπραγμάτευση μαθηματικές έννοιες. Μέσα από αυτή τη διαπραγμάτευση ανακαλύπτει τις τυχόν παρανοήσεις του και προχωρά στις απαραίτητες συνδέσεις ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες, τις οποίες μπορεί να χρησιμοποιήσει κατά την επίλυση προβλημάτων ώστε να καταστεί ένας καλός λύτης προβλημάτων.

Σε μαθησιακές καταστάσεις που δημιουργούνται με τη χρήση εκπαιδευτικού υλικού το παιδί πρέπει να δράσει και μάλιστα αυθόρμητα. Σε αυτό συντείνει το είδος του υλικού, ο τρόπος που θα το παρουσιάσει ο εκπαιδευτικός και το είδος της δραστηριότητας που θα προταθεί. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να αντλούνται από επίπεδο κατάλληλο για τις δυνατότητες του συγκεκριμένου παιδιού ή της συγκεκριμένης ομάδας παιδιών.

Τα παιδιά είναι καλό να κάθονται σε ομάδες, παρότι οι δραστηριότητες είναι οργανωμένες σε ατομικά φύλλα εργασίας. Το παιδί μοιράζεται όχι μόνο τα υλικά αλλά και τις σκέψεις του, τις στρατηγικές επίλυσης που επιλέγει, τις σωστές και τις ‘λανθασμένες’ επιλογές με τα μέλη της ομάδας. Βοηθάει και βοηθιέται, σκέφτεται και συγκρίνει, συζητά και επιχειρηματολογεί. Αρκετές φορές χρειάζεται να δοθεί χρόνος στα παιδιά για πειραματισμούς με το εκπαιδευτικό υλικό και χρόνος εξοικείωσης με αυτό. Άλλες φορές τα παιδιά μπορεί να ανακαλύψουν χρήσεις του υλικού με διαφορετικό τρόπο που να οδηγεί σε άλλες από τις προσδοκώμενες μαθηματικές έννοιες. Το είδος της εργασίας και συνεργασίας που αναπτύσσεται μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο με τη χρήση του εκπαιδευτικού υλικού σε ώρες εξωσχολικές και ανεξάρτητες από την τάξη που ανήκει το παιδί στο πρωινό σχολείο του δίνει τη δυνατότητα να δομήσει τη δική του μαθηματική γνώση.



Το παιδί, είτε στην ομάδα είτε μόνο του, θα πρέπει να παροτρύνεται να αιτιολογεί τις επιλογές του, τις αποφάσεις του, τις λύσεις του. Αυτή η διαδικασία είναι πολύ σημαντική γιατί τον οδηγεί σε μεταγνωστικές διαδικασίες που τον βοηθούν να συνειδητοποιήσει τις σκέψεις και πράξεις του.

## Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Ο εκπαιδευτικός παίζει σπουδαίο ρόλο στο συγκεκριμένο εκπαιδευτικό πρόγραμμα.

- ⊙ Αξιολογεί την αρχική μαθηματική κατάσταση του κάθε παιδιού που μπαίνει στο πρόγραμμα, καθώς και τις δυνατότητές του,
- ⊙ ομαδοποιεί τα παιδιά σύμφωνα με αυτή την αξιολόγηση,
- ⊙ επιλέγει το επίπεδο από το οποίο θα ξεκινήσει το πρόγραμμα για την κάθε ομάδα,
- ⊙ σχεδιάζει ένα πρόγραμμα-πλάνο για την κάθε ομάδα για ένα εξάμηνο και το οποίο χωρίζει σε εβδομαδιαίες εργασίες,
- ⊙ επιλέγει το εκπαιδευτικό υλικό και τα φύλλα εργασίας που το συνοδεύουν με τρόπους που θα διευκολύνουν τα παιδιά να εξελίξουν τις μαθηματικές τους γνώσεις,
- ⊙ αξιολογεί την πορεία του πλάνου της κάθε ομάδας σε τακτά χρονικά διαστήματα που ο ίδιος μπορεί να ορίσει, όπως για παράδειγμα κάθε δύο εβδομάδες ή κάθε φορά που ολοκληρώνονται οι δραστηριότητες με βάση συγκεκριμένο εκπαιδευτικό υλικό.

Ο εκπαιδευτικός φροντίζει να φέρει στο κάθε μάθημα το εκπαιδευτικό υλικό που θα χρησιμοποιηθεί. Συμμετέχει και βοηθά τα παιδιά να κατανοήσουν τις εργασίες που χρειάζεται να κάνουν στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων του κάθε φύλλου εργασίας. Η συμμετοχή του είναι διακριτική και ανάλογα με τις ανάγκες των παιδιών. Αλλού χρειάζεται να επέμβει λιγότερο και αλλού περισσότερο. Η χρονική στιγμή και η διάρκεια της παρέμβασης εξαρτώνται από το παιδί ή την ομάδα. Δραστηριότητες που μπορεί να φαίνονται εύκολες στον εκπαιδευτικό είναι δυνατόν να αποδειχθούν δύσκολες για το παιδί και αντιστρόφως.

Ο εκπαιδευτικός καλλιεργεί το διάλογο ανάμεσα στα μέλη της ομάδας και στην ολομέλεια της τάξης ενθαρρύνοντας όλα τα παιδιά να λάβουν μέρος σεβόμενος παράλληλα τις ιδιαιτερότητές τους. Θέτει ερωτήσεις που άλλοτε προκαλούν το ενδιαφέρον και τις εμπειρίες των παιδιών και άλλες φορές αξιοποιούν τις γνώσεις που αποκτήθηκαν για να οδηγηθούν σε κάποια γενίκευση ή συμπέρασμα.

Κάποιες φορές ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι ευέλικτος σε σχέση με το πλάνο του και να "παίρνει" χρόνο κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας για να μελετήσει απροσδόκητες ιδέες και λύσεις των παιδιών. Είναι σημαντικό να μην απορρίψει κάτι πριν το σκεφτεί και ο ίδιος ψύχραιμα ζητώντας στο μεταξύ από τα παιδιά να διατυπώσουν επιχειρήματα γραπτά ή προφορικά.

## Η δομή του νέου εκπαιδευτικού υλικού

Το νέο εκπαιδευτικό υλικό είναι ταξινομημένο σε τρία μαθησιακά επίπεδα με βάση την ηλικία των παιδιών. Το πρώτο επίπεδο απευθύνεται σε παιδιά Νήπια έως και Β΄ Δημοτικού. Το δεύτερο επίπεδο απευθύνεται σε παιδιά Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού, ενώ το τρίτο σε παιδιά των τελευταίων δύο τάξεων του Δημοτικού (Ε΄ και ΣΤ΄) και της Α΄ τάξης του Γυμνασίου. Κάθε επίπεδο περιλαμβάνει το βιβλίο του μαθητή το οποίο συνοδεύεται από ένα πακέτο με τα διδακτικά υλικά που περιλαμβάνονται στις δραστηριότητες κάθε επιπέδου.

Τα διδακτικά υλικά που περιλαμβάνονται στις δραστηριότητες των βιβλίων και των τριών επιπέδων είναι τα ακόλουθα:

### ◆ **Ράβδοι του Cuisenaire**

Οι ράβδοι του Cuisenaire χρησιμοποιούνται κυρίως για την ανάπτυξη των κλασματικών εννοιών και χαρακτηρίζονται ως μοντέλα μήκους τα οποία περιλαμβάνονται σε δραστηριότητες σύγκρισης μηκών. Οι ράβδοι του Cuisenaire έχουν κομμάτια με μήκη 1 έως 10 μετρημένα με βάση τη μικρότερη ράβδο. Κάθε μήκος είναι διαφορετικού χρώματος για να αναγνωρίζεται εύκολα. Το μοντέλο της ράβδου είναι ευέλικτο διαθέτοντας χωριστά χρώματα για συγκρίσεις. Επιπλέον, οι ράβδοι του Cuisenaire χρησιμοποιούνται και σε δραστηριότητες που στοχεύουν στην ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού στο πρώτο και δεύτερο επίπεδο.

### ◆ **Ντόμινο**

Το ντόμινο είναι ένα μοντέλο πολλαπλής χρήσης. Η ενασχόληση των παιδιών με το συγκεκριμένο μοντέλο στο πρώτο επίπεδο στοχεύει στην ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών και στην αίσθηση του αριθμού αλλά στα μεγαλύτερα επίπεδα επεκτείνεται στις αριθμητικές πράξεις. Το ντόμινο είναι το παιχνίδι που αποτελείται από 28 ορθογώνιες ψηφίδες (κομμάτια). Κάθε ψηφίδα είναι χωρισμένη σε δύο ίσα τετράγωνα που στο καθένα έχουν σχεδιαστεί από 0 έως 6 βουλίτσες με τη μορφή που παρουσιάζονται και στα ζάρια. Γενικά τα πρότυπα διάταξης των κουκίδων στα ντόμινο είναι οικεία στα παιδιά, καθώς είναι όμοια με των ζαριών με τα οποία έχουν παίξει πολλά παιχνίδια. Ο συνηθισμένος τρόπος που παίζουν τα παιδιά με τα ντόμινο είναι ταιριάζοντας τις άκρες. Δηλαδή σε ένα κομμάτι ντόμινο όπου η μια του άκρη έχει το 0 (καμία βουλίτσα), μπορώ να ταιριάξω μόνο ένα κομμάτι ντόμινο που έχει στην μία άκρη του 0. Μια δραστηριότητα εξοικείωσης θα ήταν να απλώσετε όλα τα ντόμινο και να ζητήσετε από τα παιδιά να παίξουν ταιριάζοντας τις άκρες.

### ◆ **Γεωπίνακες**

Οι γεωπίνακες αποτελούν ένα από τα καλύτερα μέσα για την αναπαράσταση δισδιάστατων σχημάτων. Κυρίως χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη των γεωμετρικής σκέψης των παιδιών αλλά παρουσιάζονται και δραστηριότητες όπου ο γεωπίνακας αντιμετωπίζεται ως μοντέλο εμβαδού για την ανάπτυξη των κλασματικών εννοιών. Αποτελεί εξαιρετική μέθοδος για τη κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων από τα παιδιά. Η κατασκευή σχημάτων όμως στο γεωπίνακα θα πρέπει να συνοδεύεται και με τη σχεδίαση των σχημάτων σε ειδικά φύλλα με κουκίδες που αναπαριστούν το γεωπίνακα. Τα αντίγραφα δίνουν την δυνατότητα στα παιδιά να δημιουργούν πλήρη σύνολα σχεδίων, τα οποία θα μπορούν να τίθενται σε συζήτηση από όλα τα παιδιά της τάξης.

## ◆ Τάνγκραμ

Τα Τάνγκραμ ή αλλιώς κινέζικα παζλ, είναι ένα πολύ παλιό και δημοφιλές σύνολο σχημάτων για παζλ. Το καθιερωμένο σύνολο με 7 κομμάτια του Τάνγκραμ προκύπτει από το χωρισμό ενός τετραγώνου. Τα δύο μικρά τρίγωνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να φτιαχτεί το παραλληλόγραμμο, το τετράγωνο και το μεσαίο τρίγωνο. Τέσσερα μικρά τρίγωνα συνθέτουν το μεγάλο τρίγωνο. Έτσι δίνεται η ευκαιρία για διερεύνηση σχετικά με τα κομμάτια που είναι ισεμβαδικά αλλά έχουν διαφορετικό σχήμα. Το Τάνγκραμ δίνει μια καλή ευκαιρία για σύγκριση εμβαδών. Παράλληλα, αποτελεί και ένα από τα μοντέλα εμβαδού για τη ανάπτυξη των κλασματικών εννοιών.

## ◆ Πεντόμινο

Το πεντόμινο είναι ένα σχήμα που δημιουργείται αν συνδέσουμε πέντε ίσα τετράγωνα. Κάθε τετράγωνο πρέπει να έχει τουλάχιστον μια πλευρά κοινή με ένα άλλο. Συνήθως οι δραστηριότητες με τα πεντόμινα περιλαμβάνουν τη χρήση τετραγωνικών καμβάδων όπου το κάθε τετραγωνάκι του καμβά είναι ίσο με τα τετράγωνα του πεντόμινο. Αυτό γίνεται κυρίως για να πειραματίζονται τα παιδιά στη δημιουργία διαφορετικών πεντόμινο, τα οποία τα σχεδιάζουν κάθε φορά στον τετραγωνικό καμβά. Στις εισαγωγικές δραστηριότητες τα παιδιά παροτρύνονται να δοκιμάσουν τη δημιουργία όσο το δυνατόν περισσότερων κομματιών πεντόμινο. Τα παιδιά ανακαλύπτουν ότι τα κομμάτια του πεντόμινο που μπορούν να κατασκευάσουν είναι 12 και τα χρησιμοποιούν σε ποικίλες δραστηριότητες που στοχεύουν στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, στην μελέτη της σχέσης περιμέτρου-εμβαδού, στην ανάπτυξη της έννοιας της μέτρησης, στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, κ.ά.

## ◆ *Pattern Blocks*

Το χειραπτικό υλικό *Pattern Blocks* είναι μια συλλογή από επίπεδα σχήματα (τετράγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, ισοσκελές τραπέζιο, πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβος, κανονικό εξάγωνο). Το χρησιμοποιούμε συνήθως για την κάλυψη επιφανειών (ψηφιδωτά), καθώς και για την διδασκαλία κλασματικών εννοιών.

Πέρα από τα παραπάνω υλικά στις δραστηριότητες περιλαμβάνεται και η χρήση απλών αντικειμένων από την καθημερινή ζωή, όπως είναι ο σπάγγος, η σβούρα, ανθρωπάκια, σχέδια με χρώματα κ.ά. Οι δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση χειραπτικών μοντέλων, είτε πρόκειται για δομημένα υλικά είτε για μη δομημένα, παρέχουν πολύ περισσότερες ευκαιρίες για διερεύνηση, για πειραματισμό, για σκέψη, για συζήτηση και για συλλογισμό. Επιπλέον, κεντρίζουν το ενδιαφέρον των παιδιών και έτσι η εμπλοκή τους σε δραστηριότητες διερεύνησης και προβληματισμού γίνεται πιο ευχάριστη.

Οι δραστηριότητες που παρουσιάζονται και στα τρία επίπεδα είναι ταξινομημένες με βάση το διδακτικό υλικό που περιλαμβάνουν. Παρόλα αυτά υπάρχουν περιπτώσεις στο δεύτερο και τρίτο επίπεδο όπου σε μια σειρά από δραστηριότητες χρησιμοποιείται μια ποικιλία από διαφορετικά υλικά. Το κοινό που έχουν αυτές οι δραστηριότητες είναι ότι αναφέρονται στην ίδια μαθηματική έννοια. Για παράδειγμα, σχετικά με την ανάπτυξη των κλασματικών εννοιών, παρουσιάζονται δραστηριότητες όπου χρησιμοποιούνται διάφορα μοντέλα αναπαράστασης των εννοιών αυτών.

Στην αναλυτική περιγραφή των διδακτικών ενοτήτων θα υπάρχει ένα εικονίδιο που αναπαριστά το διδακτικό υλικό που θα χρησιμοποιηθεί στη συγκεκριμένη ομάδα δραστηριοτήτων. Έτσι θα είναι εύκολο για τον εκπαιδευτικό να προετοιμάσει το σχετικό υλικό.

## **Τρόπος διεξαγωγής του μαθήματος χρησιμοποιώντας το νέο εκπαιδευτικό υλικό**

Τη ροή του μαθήματος ρυθμίζει κυρίως το εκπαιδευτικό υλικό και οι δραστηριότητες που έχουν οργανωθεί με βάση τις ιδιότητες και τη χρήση του. Στο πρώτο επίπεδο υπάρχουν δραστηριότητες εξοικείωσης του παιδιού με το εκπαιδευτικό υλικό που στα άλλα επίπεδα δεν υπάρχουν. Αρκετές φορές, και εφόσον το κρίνει ο εκπαιδευτικός, μπορεί να αφιερωθεί χρόνος εξοικείωσης των παιδιών με το εκπαιδευτικό υλικό πριν το χρησιμοποιήσουν σε κάποια δραστηριότητα, εάν τα παιδιά δεν έχουν ξαναχρησιμοποιήσει το συγκεκριμένο υλικό και δεν είναι στο Επίπεδο 1. Αυτές τις ενέργειες γνωριμίας και εξοικείωσης μπορεί να τις οργανώσει επί τόπου ο εκπαιδευτικός σύμφωνα με τις ανάγκες και ανεξάρτητα από το σχετικό υλικό του πρώτου επιπέδου.

Ο εκπαιδευτικός κάνει τον προγραμματισμό του με βάση το υλικό για τα διαφορετικά επίπεδα: Στο *πρώτο επίπεδο* επειδή συνήθως η μαθηματική ικανότητα ενός παιδιού συμβαδίζει με τη γλωσσική ικανότητα (ανάγνωση και κατανόηση), θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να επιλέγει, ανάλογα με τη γλωσσική ικανότητα (ανάγνωση και κατανόηση) των παιδιών, είτε να διαβάσει ο ίδιος την εκφώνηση της δραστηριότητας είτε να “βάλει” τα παιδιά να τη διαβάσουν φωναχτά. Στο *δεύτερο επίπεδο* και το  *τρίτο επίπεδο* ο εκπαιδευτικός μπορεί να αφήνει τα παιδιά να διαβάσουν τη δραστηριότητα στο φύλλο εργασίας πρώτα σιωπηρά και να προσπαθήσουν να κατανοήσουν τι τους ζητάει να κάνουν, κατόπιν να “ελέγξει” την κατανόηση και να ζητήσει τις πρώτες πιθανές στρατηγικές επίλυσης κάνοντας ένα μικρό καταιγισμό ιδεών. Επιπλέον, στο  *τρίτο επίπεδο* μπορεί ο εκπαιδευτικός να ζητήσει από τα παιδιά να καταγράψουν τις στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος και τις αιτιολογήσεις των πράξεών τους (“κάνω αυτό γι’ αυτό το λόγο...”).

# **Αναλυτική Περιγραφή των Διδακτικών Ενοτήτων**

## Πρώτο επίπεδο



### Δραστηριότητες με χρήση των ράβδων του Cuisenaire

Τα φύλλα εργασίας με χρήση των ράβδων του Cuisenaire στο Επίπεδο 1 αφορούν στην ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού μέσα από αντιστοιχίσεις συνόλων (ομάδων) ομοειδών αντικειμένων με τον αριθμό και από σχέσεις μεταξύ των αριθμών. Η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης από το παιδί είναι ζωτικής σημασίας όχι μόνο για την εκμάθηση των αριθμών και των σχέσεών τους αλλά και για την μετέπειτα επέκταση αυτής της γνώσης για την κατανόηση και άλλων αριθμών, όπως δεκαδικών κλασμάτων αλλά και μονάδων μέτρησης που στηρίζονται στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, όπως του μέτρου και των υποδιαιρέσεών του.

Οι **σελίδες 7** και **8** αφορούν σε δύο εργασίες γνωριμίας και εξοικείωσης με το εκπαιδευτικό υλικό. Στην πρώτη το παιδί καλείται να γνωρίσει τις διαφορετικές ράβδους και να αντιστοιχίσει συγκεκριμένο χρώμα με συγκεκριμένο αριθμό. Το μέγεθος της ράβδου πιθανόν να βοηθήσει στην αναγνώριση της σχέσης και στην αντιστοίχιση. Μπορεί τα παιδιά να παρατηρήσουν ότι τα δύο μέρη του μουστακιού είναι άνισα μεταξύ τους, το ίδιο και τα δύο μάτια. Μπορούν να βρουν και να εκφράσουν τη διαφορά σε λευκά ραβδάκια μήκους 1 εκ. Στη δεύτερη εργασία το παιδί καλείται να αντιστοιχίσει την κάθε ράβδο με χρώμα και αριθμό, επεκτείνοντας τη σύνδεση που είχε προταθεί στην προηγούμενη εργασία.

Η **σελίδα 9** έχει ως μαθηματικό στόχο την τοποθέτηση των αριθμών ως το 10 σε σειρά έτσι ώστε να αυξάνεται η αξία του επόμενου σε σχέση με τον προηγούμενο κατά μία μονάδα μέσα από την επίλυση ενός προβλήματος (να φτάσει ο Ραφαήλ το βιβλίο). Οι ράβδοι τοποθετούνται στη σειρά και μπορεί ο εκπαιδευτικός να οδηγήσει το παιδί να παρατηρήσει ότι κάθε επόμενο σκαλί-χρώμα δημιουργείται με την προσθήκη μιας ακόμη λευκής ράβδου (δημιουργία του επόμενου αριθμού προσθέτοντας κάθε φορά μια μονάδα στον αριθμό-ράβδο).

Η **σελίδα 10** αναφέρεται στη τοποθέτηση των αριθμών-ράβδων στη σειρά με αυξανόμενη αξία πρώτα και μειωνόμενη μετά κατά μία μονάδα του επόμενου από τον προηγούμενο, ώστε να σχηματιστούν δύο σκάλες του 10 (άνοδος και κάθοδος). Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προκαλέσει τα παιδιά να ανεβούν δύο δύο τα σκαλιά και να τα κατεβούν όμοια, ή πέντε πέντε, κ.ο.κ.

Στη **σελίδα 11** το παιδί καλείται να ανακαλύψει σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές ράβδους. Εισάγεται με αυτόν τον τρόπο η κατασκευή αριθμού από την σύνθεση άλλων μικρότερων αριθμών που δίνονται σε ζευγάρια ή τριάδες και που θα μας απασχολήσει εκτενώς στα επόμενα φύλλα εργασίας.

Στη **σελίδα 12** εισάγονται οι έννοιες 'ανάμεσα', 'μικρότερο' και 'μεγαλύτερο'. Οι λεκτικές αυτές εκφράσεις χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς μέσα στη δεκάδα με στόχο την απαρίθμηση και τη σειροθέτηση. Ως πλαίσιο χρησιμοποιείται πάλι η απεικόνιση της σκάλας με τις ράβδους-χρώματα. Σε αυτό το φύλλο εργασίας παρουσιάζεται ένας συνδυασμός πολλαπλών αναπαραστάσεων: σκάλα-ράβδοι, ράβδοι-χρώμα, χρώμα-μπαλόνια, μπαλόνια-αριθμοί, αριθμοί-σύμβολα. Οι λεκτικές εκφράσεις αναφέρονται άμεσα στις ράβδους χρώματα και αναζητείται η συμπλήρωση των κενών μέσω απλής αναγνώρισης της θέσης των χρωμάτων. Η έμμεση αναγνώριση των παραπάνω σχέσεων μέσω μπαλονιών-αριθμών και της αντιστοίχισής τους με τις ράβδους θα πρέπει πιθανόν να αναδειχθεί σε άμεση με κατάλληλες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού.

Στη **σελίδα 13** παρουσιάζεται ένας συνδυασμός πολλαπλών αναπαραστάσεων: σκάλα-ράβδοι, ράβδοι-χρώμα, χρώμα-μπαλόνια, μπαλόνια-αριθμοί, αριθμοί-σύμβολα. Σε αυτή τη δραστηριότητα το παιδί μπορεί να παρακάμψει τις ράβδους και να συνδέσει απευθείας μπαλόνια-αριθμούς και χρώματα. Η δεύτερη άσκηση αφορά την έκφραση 'ανάμεσα' και το πώς την αντιλαμβάνονται και τη χειρίζονται τα παιδιά.

Στη **σελίδα 14** η σειροθέτηση-σκάλα παίρνει τη μορφή του τρένου. Στο νέο πλαίσιο 'βαγό-νι-θέσεις σε κάθε βαγόνι' επιχειρείται η αντιστοίχιση του αριθμού με το πλήθος των μονάδων-αντικειμένων από τις οποίες αποτελείται. Στην κορυφή του φύλλου εργασίας δίνεται και η μονάδα μέτρησης που είναι το άσπρο ραβδάκι μήκους 1 εκ. Το παιδί μπορεί να βοηθηθεί και από τις ρόδες, των οποίων ο αριθμός σε κάθε βαγόνι υποδηλώνει και τις θέσεις-άσπρα ραβδάκια.

Στη **σελίδα 15** επιχειρείται η μετάβαση από το χειραπτικό υλικό στην αναπαράσταση και το συμβολικό. Το παιδί θα πρέπει να είναι σε θέση να δομήσει τους αριθμούς από το 1 έως το 10 ξεκινώντας με ένα λευκό ραβδάκι που αντιπροσωπεύει και ισούται με τον αριθμό 1, δύο λευκά ραβδάκια που αθροιζόμενα ισούνται με τον αριθμό 2 και συνεχίζοντας με τις αντίστοιχες ράβδους 2, 3, 4,... και 9 έτσι ώστε κάθε φορά να προστίθεται ένα λευκό ραβδάκι και να εξισώνεται το άθροισμα με τον επόμενο αριθμό. Οι ενέργειες με τις ράβδους και τα κυβάκια αντιστοιχούν σε προσθέσεις που στηρίζονται στη βάση του ότι κάθε αριθμός δημιουργείται από τον προηγούμενό του στον οποίο προσθέτουμε μια μονάδα. Απέναντι από κάθε πράξη με ράβδους το παιδί εκτελεί και την αντίστοιχη πράξη της πρόσθεσης μόνο με αριθμούς.

Στη **σελίδα 16** παρουσιάζεται η πράξη της πρόσθεσης με τη βοήθεια των ράβδων. Το φύλλο εργασίας περιλαμβάνει τρεις ομάδες ασκήσεων. Στο παράδειγμα και την πρώτη ομάδα ασκήσεων η πρόσθεση εμφανίζεται ως η αντιστοίχιση δύο ράβδων, αρχικά διαφορετικού χρώματος (παράδειγμα: κίτρινο+ μοβ) που τοποθετούνται η μια δίπλα στην άλλη, με μία άλλη ράβδο που έχει το ίδιο μήκος με το συνολικό μήκος των δύο προηγούμενων ράβδων (μπλε). Η όλη διαδικασία με τις ράβδους αναπαρίσταται συμβολικά με αριθμούς που αντιστοιχούν στις δύο ράβδους ( $3 + 2$ ) και οι οποίοι, προστιθέμενοι με τη χρήση του συμβόλου της πρόσθεσης, ισούνται με το αποτέλεσμα που είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στη ράβδο-συνολικό μήκος (5). Στη δεύτερη ομάδα ασκήσεων η πρόσθεση αριθμών τοποθετείται σε εναλλακτικά πλαίσια και συνδέεται με το

άθροισμα μετρήσεων των δύο μερών ενός δάχτυλου (κυρίως δάχτυλο + νύχι) και ενός μολυβιού (κυρίως σώμα + μύτη) για τις οποίες μετρήσεις χρησιμοποιούνται οι κατάλληλοι ράβδοι. Στην τρίτη σειρά ασκήσεων προστίθενται ράβδοι ίδιου χρώματος.

Οι **σελίδες 17, 18, και 19** μπορούν να θεωρηθούν ως εναλλακτικές προσεγγίσεις για τη σύνθεση των αριθμών και για τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση με χρήση των ράβδων, με τις οποίες έχουν τα παιδιά ασχοληθεί σε προηγούμενα φύλλα εργασίας. Οι δραστηριότητες που προτείνονται είναι ενταγμένες στο πλαίσιο ενός φορτηγού που φορτώνει στην καρότσα του και ξεφορτώνει ράβδους που έχουν συγκεκριμένο μήκος. Στη **σελίδα 17** τα παιδιά μπορούν να κάνουν διάφορους συνδυασμούς δύο ή περισσότερων ράβδων για να φτιάξουν το 8. Δοκιμάζουν με ράβδους και ανάλογα με τους συνδυασμούς που έχουν βρει χρωματίζουν τα τετραγωνάκια στον πίνακα 10 x 10. Στη **σελίδα 18** δίνονται δύο συνδυασμοί του 12, ένας με δύο και ένας με τρεις ράβδους-χρώματα-προσθετούς και ζητείται από τα παιδιά να κατασκευάσουν και να γράψουν ένα δικό τους συνδυασμό με τρεις προσθετούς. Στη **σελίδα 19** η αφαίρεση δίνεται μέσα στο πλαίσιο του ξεφορτώματος του φορτηγού. Η αφαίρεση εκφράζεται ως διαφορά ανάμεσα σε ράβδους-χρώματα-αριθμούς, όπου το παιδί θα πρέπει να ελίσσεται σύμφωνα με τα δεδομένα των ασκήσεων. Στα δύο παραδείγματα που δίνονται στο φύλλο εργασίας τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τη μια φορά τον αφαιρετέο και τη διαφορά σε ράβδους-χρώματα χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της αφαίρεσης με αριθμούς και την άλλη φορά τη διαφορά σε ράβδο-χρώμα και την αντίστοιχη αφαίρεση με αριθμούς.

Στις **σελίδες 20, 21, 22 και 23** το παιδί καλείται να κατασκευάσει τους αριθμούς από το 3 έως και το 10 με τη βοήθεια των ράβδων του Cuisenaire με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αριθμών, έτσι ώστε το άθροισμά τους να δίνει έναν συγκεκριμένο αριθμό-χρώμα. Στη σελίδα 14 ζητούνται οι συνδυασμοί για τρεις αριθμούς. Το 3-λαχανί κατασκευάζεται με 3 λευκά ραβδάκια, κατόπιν με 1 ράβδο 2-κόκκινο και 1 λευκό ραβδάκι και τέλος ένα συνδυασμό που δεν δίνεται και αναμένεται να το βρει το παιδί αντιμετωπίζοντας αυτά που χρησιμοποίησε στην προηγούμενο συνδυασμό, δηλαδή 1 λευκό ραβδάκι και 1 ράβδο 2-κόκκινο. Το 4-μοβ με 4 λευκά ραβδάκια και κατόπιν με άλλους τρεις συνδυασμούς που δεν δίνονται και αναμένεται να βρει το παιδί χρησιμοποιώντας, πιθανόν, 2 ράβδους 2-κόκκινο ή 1 ράβδο 3-λαχανί και 1 λευκό ραβδάκι ή 1 λευκό ραβδάκι και 1 ράβδο 3-λαχανί. Όμοια και για το 5-κίτρινο προτείνεται ο συνδυασμός με 5 λευκά ραβδάκια και αφήνεται η πρωτοβουλία στο παιδί για άλλους 4 συνδυασμούς χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ράβδους. Στη σελίδα 15 το 6-πράσινο κατασκευάζεται με 6 λευκά ραβδάκια και ακολουθούν 7 σειρές με 6 τετράγωνα για να κατασκευάσει το παιδί μόνος του τους υπόλοιπους συνδυασμούς, όπως για παράδειγμα 3-λαχανί και 3-λαχανί, 5-κίτρινο και 1-λευκό, κ.ο.κ.). Όμοια και για τους υπόλοιπους αριθμούς στην ίδια και τις επόμενες σελίδες.

Στη **σελίδα 24** καλείται το παιδί να εκτελέσει προσθέσεις με δύο και τρεις προσθετούς μέσα στη δεκάδα. Δίπλα σε κάθε αποτέλεσμα θα πρέπει να παραστήσει την κάθε πρόσθεση χρωματικά χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ράβδους. Σε περιπτώσεις που το παιδί είναι σε θέση να εκτελέσει τις πράξεις χωρίς τη χρήση του υλικού, μπορεί η ενέργεια με τις ράβδους να τον βοηθήσει να επιβεβαιώσει τα αποτελέσματά του. Σε κάθε περίπτωση τα χρώματα των μπαλονιών υπενθυμίζουν τα χρώματα των ράβδων-αριθμών. Για παράδειγμα, στην τελευταία πρόσθεση το παιδί βρίσκει ότι  $5 + 5 = 10$  και χρωματίζει όλα τα τετραγωνάκια κίτρινα, ενώ στην τέταρτη πρόσθεση βρίσκει ότι  $4 + 3 = 7$  και χρωματίζει 4 τετραγωνάκια μοβ και 3 λαχανί. Κατόπιν το παιδί



χρωματίζει τη χελώνα σύμφωνα με τα χρώματα των ράβδων που αντιστοιχούν στους αριθμούς που την καλύπτουν.

Στις **σελίδες 25, 26, 27, 28** και **29** το παιδί καλείται να δομήσει τους αριθμούς από το 11 ως το 20. Η δόμηση των αριθμών γίνεται με βάση το 10-ράβδος πορτοκαλί και την προσθήκη κάθε φορά ανάλογων ράβδων. Για τη δόμηση του κάθε αριθμού υπάρχει χώρος για δύο δυνατότητες. Για παράδειγμα υπάρχουν δύο δυνατότητες για το 12, μία ράβδος του 10-πορτοκαλί και δύο ραβδάκια του 1-λευκά ή μία ράβδος του 10-πορτοκαλί και μία ράβδος του 2-κόκκινο. Για το 13 μπορεί να βάλει μία ράβδο του 10-πορτοκαλί και 3 ραβδάκια του 1-λευκά ή μία ράβδο του 10-πορτοκαλί, μία ράβδο του 2-κόκκινο και ένα ραβδάκι του 1-λευκό, κ.ο.κ. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να δομήσουν τους αριθμούς από το 13 και άνω χρησιμοποιώντας και άλλους συνδυασμούς ράβδων-αριθμών στηριζόμενοι στις εμπειρίες που αποκτήθηκαν από το σχηματισμό των αριθμών 3 έως 10.

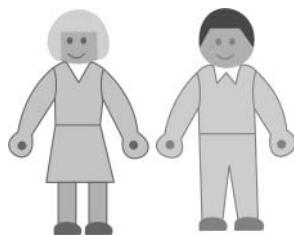
Στη **σελίδα 30** εισάγεται η πράξη της αφαίρεσης ως διαφορά. Το παιδί εργάζεται με τις ράβδους για να βρει τη διαφορά των χρωμάτων και να την αντιστοιχίσει με τη διαφορά δύο αριθμών. Το φύλλο εργασίας ξεκινά με ένα παράδειγμα-υπόδειξη. Το παιδί χρειάζεται να συγκρίνει τις ράβδους-χρώματα, να εντοπίσει τη διαφορά και να βρει ποια ράβδος-χρώμα μπορεί να συμπληρώσει τη διαφορά. Κατόπιν πρέπει να αντιστοιχίσει τις ράβδους με αριθμούς και να βρει το αποτέλεσμα της αφαίρεσης. Οι επόμενες ομάδες ασκήσεων στο ίδιο φύλλο εργασίας έχουν ως στόχο τη σταδιακή μετάβαση των παιδιών από συλλογισμούς που στηρίζονται στο 'συγκεκριμένο' σε πιο αφαιρετικές καταστάσεις, όπως είναι οι ασκήσεις που έχουν μόνο σύμβολα-αριθμούς. Ο εκπαιδευτικός θα κρίνει εάν το παιδί χρειάζεται να χρησιμοποιήσει τις ράβδους για να βρει τα αποτελέσματα αυτών των ασκήσεων. Πιθανόν να χρησιμοποιήσει τις ράβδους για να βρει τα μισά των αριθμών με δοκιμή και πλάνη, για παράδειγμα το μισό του 10 θα το βρει δοκιμάζοντας δύο μεσαίου μεγέθους ίδιες ράβδους μέχρι να εντοπίσει ότι είναι δύο κίτρινες (5) και να γράψει στην απάντηση 5.

Στη **σελίδα 31** το παιδί καλείται να κάνει μια σειρά από οριζόντιες αφαιρέσεις με αριθμούς μέσα στη δεκάδα, να γράψει τα αποτελέσματα και να συνδυάσει αυτή του την ενέργεια με ράβδους-χρώματα. Η δραστηριότητα είναι παρόμοια με την αντίστοιχη της σελίδα 18, όμως αυτή τη φορά το παιδί γράφει με λέξεις τα χρώματα που αντιστοιχούν στους αριθμούς (μειωτέο-αφαιρετέο-διαφορά) κάθε πράξης. Μπορεί να χρειαστεί να γράψει ο εκπαιδευτικός στον πίνακα ή σε καρτέλες την αντιστοιχία χρώματος-λέξης. Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει και τις ράβδους για να κάνει τις αφαιρέσεις. Κατόπιν χρωματίζει τη χελώνα σύμφωνα με τα χρώματα των ράβδων που αντιστοιχούν στους αριθμούς που την καλύπτουν.

Οι **σελίδες 32, 33** και **34** είναι παιχνίδια που τα παιδιά μπορούν να παίξουν ανά δύο χρησιμοποιώντας τις ράβδους του Cuisenaire. Νικητής αναδεικνύεται ο παίκτης που θα βάλει την τελευταία ράβδο πάνω στο ρομπότ ή την κούπα. Εάν ακολουθηθεί η πορεία του παιχνιδιού απρόσκοπτα, δηλαδή οι δύο παίκτες εναλλάσσονται και μάλιστα τοποθετούν ίδιες ράβδους κάθε φορά τότε τελευταίος βάζει ο παίκτης που ξεκίνησε δεύτερος. Σε περίπτωση που δεν τοποθετούν τις ίδιες ράβδους υπάρχει πιθανότητα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης.

Η δραστηριότητα στη **σελίδα 35** περιλαμβάνει τρεις ασκήσεις με διαδοχικές προσθέσεις και αφαιρέσεις αριθμών ως το 20. Η πρόσθεση και η αφαίρεση υποδηλώνουν εδώ τη μεταβολή. Οι ασκήσεις αυτού του φύλλου εργασίας μπορεί να θεωρηθούν εμπεδωτικές για τις πράξεις της

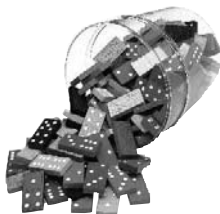
πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει τη σκάλα που βρίσκεται στο πάνω μέρος του φύλλου εργασίας και που πιθανόν έχει αναρτήσει ο εκπαιδευτικός σε κάποιο εμφανές μέρος της τάξης, για τις επί μέρους μεταβολές (προσθέσεις-αφαιρέσεις) της κάθε άσκησης. Το παιδί θα πρέπει να παρατηρήσει ότι όλες οι ασκήσεις έχουν το ίδιο αποτέλεσμα, το 16.



### Δραστηριότητες με τα ανθρωπάκια

Στις δραστηριότητες των **σελίδων 36, 37, 38, 39, 40 και 41** τα παιδιά χρησιμοποιούν το χειραπτικό υλικό (connecting people). Η βασική μαθηματική ιδέα είναι να μπορούν τα παιδιά να χειρίζονται δεδομένα, να ομαδοποιούν τα δεδομένα, εν προκειμένω το υλικό αυτό σύμφωνα με ένα χαρακτηριστικό (για παράδειγμα αγόρια-κορίτσια, δηλαδή χαρακτηριστικό το φύλο) ή το συνδυασμό δύο (μεγάλα αγόρια-μεγάλα κορίτσια, δηλαδή χαρακτηριστικά το φύλο και το μέγεθος) ή και περισσότερων χαρακτηριστικών (μεγάλα αγόρια με κόκκινα ρούχα-μικρά κορίτσια με μπλε ρούχα, με χαρακτηριστικά το μέγεθος, το φύλο και το χρώμα του ρούχου). Αυτές οι ιδέες μπορούν να αναπτυχθούν μέσω των τριών πρώτων φύλλων εργασίας.

Στη **σελίδα 39** το παιδί καλείται να πάρει 10 ανθρωπάκια και να τα χωρίσει σε ομάδες με τρεις διαφορετικούς τρόπους με βάση ένα διαφορετικό χαρακτηριστικό κάθε φορά. Οι εκφωνήσεις των τριών διαφορετικών ομαδοποιήσεων έχουν κάθε φορά ένα διαφορετικό χαρακτηριστικό, η πρώτη το φύλο, η δεύτερη το μέγεθος, η τρίτη το χρώμα του ρούχου. Στην πρώτη έχουμε δύο προσθετέους (άνδρες-γυναίκες), στη δεύτερη τρεις προσθετέους (μεγάλα-μεσαία-μικρά) και στην τρίτη τέσσερις προσθετέους (τέσσερα διαφορετικά χρώματα). Το άθροισμα των επί μέρους κάθε φορά ομάδων πρέπει να δίνει 10. Στη **σελίδα 40** ακολουθεί η αντίστροφη διαδικασία. Το παιδί καλείται να ομαδοποιήσει 10 ανθρωπάκια σύμφωνα με δοσμένα αθροίσματα. Το παιδί θα καθορίσει το χαρακτηριστικό σύμφωνα με το οποίο επέλεξε τα ανθρωπάκια. Η διατύπωση μπορεί να γίνει προφορικά ή γραπτά. Στη **σελίδα 41** επαναλαμβάνονται ασκήσεις παρόμοιες με των προηγούμενων σελίδων, αυτή τη φορά όμως με 20 ανθρωπάκια.



## Δραστηριότητες με ντόμινο

Το ντόμινο είναι ένα υλικό πολλαπλής χρήσης. Κάθε σετ από ντόμινο αποτελείται από 28 ορθογώνιες ψηφίδες (κομμάτια). Κάθε ψηφίδα είναι χωρισμένη με μια αυλακιά σε δύο τετράγωνα που στο καθένα έχουν σχεδιαστεί από 0 έως 6 βουλίτσες με τη μορφή που παρουσιάζονται και στα ζάρια. Εδώ, βέβαια, μιλούμε για τα εξάρια ντόμινο των οποίων η μια όψη μπορεί να φτάνει μέχρι το 6. Υπάρχουν και εννιάρια ντόμινο των οποίων η μια όψη μπορεί να φτάσει μέχρι το 9. Γενικά τα παιδιά γνωρίζουν το ντόμινο. Ένα από τα βασικά παιχνίδια εξοικείωσης με το υλικό που μπορεί να προηγείται σε κάθε επίπεδο είναι το εξής: Παίζεται με δύο παίκτες που ο καθένας παίρνει τα μισά (14) κομμάτια ντόμινο, τυχαία, καθώς τα έχουμε γυρίσει όλα από την ανάποδη μεριά πάνω στο τραπέζι. Αρχίζει αυτός που έχει το (0, 0). Ο επόμενος πρέπει να βρει ένα κομμάτι που να έχει στο ένα του τετράγωνο 0 για να το κολλήσει δίπλα στο κομμάτι (0, 0). Από αυτό το σημείο και εξής οι παίκτες εναλλάσσονται τοποθετώντας είτε από τη μια μεριά είτε από την άλλη κομμάτια έτσι ώστε η πλευρά του κομματιού που ακουμπά στο άλλο κομμάτι να έχει τον ίδιο αριθμό από βουλίτσες. Εάν, για παράδειγμα, μετά το (0, 0) βάλει ο δεύτερος παίκτης το κομμάτι (0, 3), τότε ο πρώτος έχει δύο δυνατότητες, ή να βάλει κάποιο κομμάτι από τη μεριά του 3 με (3, οποιοσδήποτε αριθμός) ή να βάλει από τη μεριά του 0 κάποιο κομμάτι (0, οποιοσδήποτε αριθμός). Εάν κάποιος παίκτης δεν έχει κομμάτι που να πληροί τη συνθήκη αυτή χάνει τη σειρά του και παίζει ο αντίπαλος παίκτης. Νικητής βγαίνει αυτός που θα τοποθετήσει όλα τα κομμάτια του πρώτος.

Στα συγκεκριμένα φύλλα εργασίας το ντόμινο χρησιμοποιείται για να εργαστούν τα παιδιά με τις έννοιες της ισότητας και ανισότητας των αριθμών. Οι λέξεις 'ισότητα' και 'ανισότητα' θα συνδεθούν με τις έννοιες και αντίστροφα οι έννοιες με τις λέξεις μέσα από τις δραστηριότητες με το ντόμινο. Είναι σημαντικό για το παιδί να δομήσει αυτές τις έννοιες για την καλύτερη κατανόηση της αξίας θέσης και της δομής του δεκαδικού συστήματος γενικότερα.

Η **σελίδα 42** είναι ένα φύλλο εργασίας που αποσκοπεί στην εξοικείωση του παιδιού με το συγκεκριμένο υλικό μέσα από την οργάνωση και ομαδοποίηση των 28 κομματιών του. Υπάρχουν οδηγίες για τη δραστηριότητα στην κορυφή του φύλλου εργασίας. Το παιδί καλείται να πάρει τα κομμάτια του ντόμινο και να τα τοποθετήσει σε ομάδες σύμφωνα με τον αριθμό που έχουν σε ένα από τα δύο του τετράγωνα και με τη σειρά 0, 1, 2, 3, 4, 5 και 6 στην επόμενη σελίδα. Πριν το κάνει αυτό θα πρέπει να μαντέψει ποιος αριθμός θα έχει τα περισσότερα κομμάτια. Το παιδί βλέπει ήδη στο φύλλο εργασίας ότι η ομάδα κομματιών του 0 έχει 4 κομμάτια και συνεχίζεται (τελικά 7 κομμάτια). Είναι πιθανόν να υποθέσει ότι η ομάδα του 6 έχει τα περισσότερα κομμάτια επειδή το 6 είναι ο μεγαλύτερος από τους διαθέσιμους αριθμούς. Από την άλλη μπορεί να υποθέσει ότι όλες οι ομάδες έχουν τον ίδιο αριθμό κομματιών. Προχωρώντας στην ομαδοποίηση ανακαλύπτει ότι οι ομάδες έχουν φθίνοντα αριθμό κομματιών (7, 6, 5, 4, 3, 2 και 1) και ότι η ομάδα του 0 έχει τα περισσότερα κομμάτια. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να δώσουν τις δικές τους ερμηνείες για το γεγονός αυτό.

Κατόπιν το παιδί καλείται να σκεφτεί ένα δεύτερο τρόπο ομαδοποίησης. Ο δεύτερος τρόπος μπορεί να περιλαμβάνει ομαδοποίηση σύμφωνα με τον αριθμό από τις βουλίσες που έχει αθροισματικά κάθε κομμάτι. Σε αυτή την περίπτωση τα παιδιά θα παρατηρούσαν ότι δεν μπορούν να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα. Μια άλλη κατηγοριοποίηση θα μπορούσε να περιλαμβάνει τις εξής ομάδες: τα κομμάτια των οποίων τα τετράγωνα-όψεις έχουν ίσο αριθμό από βουλίσες, τα κομμάτια των οποίων ο αριθμός από τις βουλίσες στα δύο τετράγωνα διαφέρει κατά ένα, τα κομμάτια των οποίων ο αριθμός από τις βουλίσες στα δύο τετράγωνα διαφέρει κατά δύο κ.ο.κ. Τα παιδιά εργάζονται ανά δύο ή σε ομάδες σε όλη τη διαδικασία και για τα προηγούμενα ερωτήματα.

Στη **σελίδα 44** τα παιδιά καλούνται να ομαδοποιήσουν τα κομμάτια του ντόμινο σύμφωνα με έναν από τους τρόπους που εναλλακτικά προτείνονται στην προηγούμενη παράγραφο, δηλαδή ίσο άθροισμα από βουλίσες και στις δύο όψεις. Στην κορυφή του φύλλου εργασίας υπάρχουν οδηγίες για τη δραστηριότητα. Επιπλέον στο φύλλο εργασίας δίνεται το παράδειγμα του 4 και το παιδί καλείται να συμπληρώσει με τα κομμάτια του όλη τη σειρά των αριθμών από το 0 έως το 12 στην επόμενη σελίδα. Προηγουμένως καλείται να μαντέψει ποιο άθροισμα θα έχει τα περισσότερα κομμάτια. Εάν το παιδί αξιοποιήσει την εμπειρία του από την προηγούμενη δραστηριότητα, θα είναι σκεπτικό. Μπορεί να σκεφτεί ότι τόσο το 0 όσο και το 1 θα έχουν από ένα κομμάτι. Το 12 που είναι ο μεγαλύτερος αριθμός έχει κι αυτός μονάχα ένα κομμάτι  $6 + 6$ , κ.ο.κ. Τα παιδιά μπορούν να κάνουν αρκετούς νοερούς υπολογισμούς και να ανταλλάξουν τις σκέψεις τους σε επίπεδο ομάδας για να ανταλλάγουν και επιχειρήματα πριν τις ανακοινώσουν στην τάξη.

Στη **σελίδα 46** το παιδί θα πρέπει να ενώσει με γραμμές ανά δύο τα κομμάτια που είναι ίδια.

Στη **σελίδα 47** το παιδί πρέπει να ενώσει με γραμμές ανά δύο τα κομμάτια που έχουν ίδιο αριθμό από βουλίσες αθροισματικά και στα δύο μέρη ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο οι βουλίσες είναι κατανομημένες στο κομμάτι. Και στις δύο περιπτώσεις των σελίδων 40 και 41 ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει και επιπλέον ασκήσεις αυτής της μορφής, εάν το κρίνει σκόπιμο, για λόγους εμπέδωσης ή ανάγκης των παιδιών να παίξουν με το υλικό.

Στη **σελίδα 48** το παιδί καλείται να ενώσει ανά δύο τα κομμάτια έτσι ώστε το δεύτερο κομμάτι ντόμινο να έχει μια βουλίσσα παραπάνω από το πρώτο.

Στη **σελίδα 49** το παιδί καλείται να ενώσει ανά δύο τα κομμάτια έτσι ώστε το δεύτερο κομμάτι ντόμινο να έχει μια βουλίσσα λιγότερη από το πρώτο. Ο εκπαιδευτικός με επιπλέον ασκήσεις μπορεί να επεκτείνει τις έννοιες 'ένα περισσότερο' και 'ένα λιγότερο' που δουλεύονται σε αυτές τις σελίδες θέτοντας ασκήσεις με το 'δύο περισσότερο', 'δύο λιγότερο', 'τρία περισσότερο', 'τρία λιγότερο' κ.ο.κ. Είναι σημαντικό για το παιδί να μπορεί να χειρίζεται τις σχέσεις αυτές για όλους τους αριθμούς, αλλά κυρίως για τους αριθμούς ως το 10 για να μπορεί να κατανοήσει καλύτερα το δεκαδικό σύστημα στο οποίο εργαζόμαστε. Κι αυτό γιατί το γεγονός ότι το 17 είναι κατά ένα λιγότερο από το 18 συνδέεται με την ιδέα ότι το 7 είναι κατά ένα λιγότερο από το 8. Ωστόσο ακόμη και η ανακάλυψη αυτής της σύνδεσης έχει αξία για την κατανόηση από το παιδί της θεσιακής αξίας των ψηφίων στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Αν το παιδί κατανοήσει ότι το 7 είναι μια μονάδα (1) παραπάνω από το 6, τότε θα κατανοήσει ευκολότερα μέσω της αναλογικής σκέψης ότι το 70 είναι μια δεκάδα (10) παραπάνω από το 60, κ.ο.κ.

Η **σελίδα 50** αναφέρεται σε ένα άλλο παιχνίδι με το ντόμινο που περιγράφεται στην αρχή του φύλλου εργασίας, όπου δίνονται και οι σχετικές οδηγίες. Η ιδέα του παιχνιδιού είναι η άσκηση των παιδιών στους συνδυασμούς αριθμών που έχουν ως άθροισμα ένα συγκεκριμένο αριθμό. Στο φύλλο εργασίας δίνεται και ένα παράδειγμα.

Η **σελίδα 51** πραγματεύεται τις έννοιες μικρότερος-λιγότερος, ίσος και μεγαλύτερος-περισσότερος ενός αριθμού προφανώς έως το 12 μέσω ενός άλλου παιχνιδιού με το ντόμινο που περιγράφεται και αυτό στο φύλλο εργασίας. Η ιδέα είναι να ασκηθεί το παιδί ώστε όταν του δίνεται ένας αριθμός (κομμάτι-αρχηγός) να μπορεί να ανακαλύπτει τρία κομμάτια ντόμινο τέτοια ώστε το καθένα τους να έχουν αριθμό από βουλίσες αθροισματικά μικρότερο, ίσο και μεγαλύτερο από το δοσμένο αριθμό. Η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται και να καταγράφεται σε τρεις στήλες στο φύλλο εργασίας, όσο το παιδί βρίσκει τριάδες κομματιών που πληρούν τη συνθήκη. Κατόπιν το παιδί καλείται να αλλάξει το κομμάτι-αρχηγό και να επαναλάβει τη διαδικασία αλλάζοντας τα κομμάτια της κάθε στήλης όταν δεν πληρούν τη συνθήκη για το νέο κομμάτι-αρχηγό. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει στα παιδιά και προφορικά αριθμούς-αρχηγούς ως το 20, 30 κ.ο.κ. ανάλογα με το επίπεδο της τάξης ή της ομάδας για να φτιάξουν τις αντίστοιχες τριάδες αριθμών νοερά.

Στη **σελίδα 52** το παιδί ασκείται στους συνδυασμούς αριθμών που έχουν ως άθροισμα ένα συγκεκριμένο αριθμό εργαζόμενος στο πλαίσιο τρενάκι με βαγόνια από κομμάτια του ντόμινο. Στο φύλλο εργασίας αυτό το παιδί καλείται να βρει και να βάλει τους συνδυασμούς των 6, 8, 10 και 12 και στο επόμενο φύλλο εργασίας τους συνδυασμούς των 5, 7, 9 και 11.

Στη **σελίδα 54** το παιδί καλείται να επιλέγει κάθε φορά 3 κομμάτια για να κατασκευάσει τρενάκια που πληρούν συγκεκριμένες προϋποθέσεις-συνθήκες. Για παράδειγμα να φτιάξει τρενάκι με τις λιγότερες βουλίσες και να γράψει το συνολικό αριθμό από βουλίσες σε όλα τα βαγόνια. Για το σκοπό αυτό το παιδί θα πρέπει να αναζητήσει αυτά τα τρία κομμάτια στους συνδυασμούς του μικρότερου αριθμού που είναι το 0. Το παιδί μπορεί να εφαρμόσει δοκιμή και πλάνη. Η λύση είναι μία σε ό,τι αφορά τον αριθμό από τις βουλίσες (3) και το ένα από τα τρία κομμάτια από το οποίο πιθανόν θα σκεφτούν τα παιδιά να αρχίσουν θα είναι το (0, 0). Τα άλλα δύο μπορεί να είναι είτε το (0, 1) και το (0, 2) είτε το (0,1) και το (1,1). Τα παιδιά συγκρίνουν τις λύσεις τους και τις αιτιολογούν. Παρόμοια εργάζονται και για το τρενάκι με τις περισσότερες βουλίσες (12). Ξεκινούν από το κομμάτι (6,6) και κατεβαίνουν (6, 5) και (6, 4) ή (6, 5) και (5, 5). Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να δώσει εναλλακτική δραστηριότητα με 4 βαγόνια, κ.ο.κ.

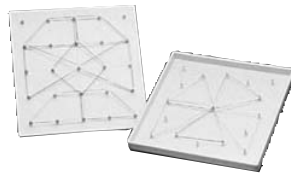
Στη **σελίδα 55** το παιδί καλείται να κινηθεί με παρόμοιο τρόπο έχοντας αυτή τη φορά να χειριστεί 4 κομμάτια.

## Παιχνίδια και προβλήματα στον πίνακα 1-100

Στη **σελίδα 56** τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν στον πίνακα 1-100, έναν πίνακα 10 x 10, τους αριθμούς που λείπουν. Κατόπιν καλούνται να προσδιορίσουν με τη βοήθεια του πίνακα ορισμένους αριθμούς που τους βρίσκουν αποκωδικοποιώντας μια σειρά από προτάσεις. Οι προτάσεις αυτές εστιάζουν σε έννοιες όπως 'πριν', 'μετά', 'ανάμεσα', 'ζυγός αριθμός', 'μονός αριθμός'. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επινοήσει παρόμοιες προτάσεις προφορικά και για άλλους εκτός από τους προτεινόμενους αριθμούς και να ζητά από τα παιδιά προφορικές απαντήσεις και αιτιολογήσεις γι' αυτές.

Στη **σελίδα 57** υπάρχουν δύο παιχνίδια-ασκήσεις που περιλαμβάνουν προσθέσεις και αφαιρέσεις με αριθμούς μέχρι το 100. Βοήθεια μπορεί να αναζητήσουν τα παιδιά στον πίνακα 10 x 10 που συνοδεύει τις ασκήσεις καθώς και μια σκάλα με τις δεκάδες ως το 100. Στην πρώτη άσκηση το κάθε άθροισμα ή διαφορά αντιστοιχεί σε ένα γράμμα της αλφαβήτου που τα παιδιά πρέπει να τοποθετήσουν στην κατάλληλη θέση ώστε να σχηματιστεί μια πρόταση που απαντά στην ερώτηση της επικεφαλίδας του φύλλου εργασίας. Η δεύτερη άσκηση περιλαμβάνει μόνο αφαιρέσεις για τις οποίες το παιδί έχει σημείο εκκίνησης έναν αριθμό κατόπιν κάνει κάποια βήματα πίσω και πρέπει να βρει σε ποιον αριθμό καταλήγει.

Το παιχνίδι στις **σελίδες 58 και 59** παίζεται με τέσσερις -μπορεί και τρεις ή δύο- παίχτες, ένα συνδετήρα, ένα μολύβι και τις καρτέλες-σβούρες που βρίσκονται στην αντίστοιχη σελίδα. Ο πρώτος παίκτης τοποθετεί το μολύβι και το συνδετήρα στην πρώτη σβούρα και περιστρέφει το συνδετήρα για να δει προς τα πού θα πάει. Μετά κάνει το ίδιο και με τη δεύτερη σβούρα για να δει πόσα βήματα θα κάνει. Το ίδιο κάνουν και οι άλλοι ή ο άλλος παίκτης. Νικητής θα είναι αυτός που θα φτάσει πρώτος το αστέρι του 100. Μια παραλλαγή του παιχνιδιού θα μπορούσε να έχουμε αν στη θέση της δεύτερης σβούρας βάλουμε ζάρια, δηλαδή αντί να υπάρχει η δυνατότητα το πολύ 4 βημάτων να υπάρχει η δυνατότητα το πολύ 6 βημάτων.



### Δραστηριότητες με το γεωπίνακα

Ο γεωπίνακας είναι ένα εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιείται κυρίως για τη δόμηση γεωμετρικών εννοιών. Ωστόσο στην ομάδα δραστηριοτήτων που προτείνεται σε αυτό το επίπεδο ο γεωπίνακας χρησιμοποιείται και για τη δόμηση της έννοιας του κλάσματος. Κάθε ομάδα μπορεί να έχει δύο ή τρεις γεωπίνακες, ώστε τα παιδιά να δουλεύουν ανά δύο ή τρία. Τα λαστιχάκια είναι απλά ή πολύχρωμα. Στα φύλλα εργασίας δίνονται σχεδιασμένοι γεωπίνακες 5 x 5 (5 είναι ο αριθμός των καρφιών) που μπορούν να χρησιμοποιούνται εναλλακτικά ή παράλληλα με τους πραγματικούς γεωπίνακες. Είναι σημαντικό να αποτυπώνουν τα παιδιά σε χαρτί τα σχέδια που κάνουν στο γεωπίνακα. Τα αντίγραφα δίνουν στα παιδιά τη δυνατότητα να δημιουργήσουν πλήρη σύνολα λύσεων-σχεδίων για μια συγκεκριμένη άσκηση. Τα σχέδια των παιδιών μπορούν να αναρτώνται στον τοίχο της τάξης σε ομάδες σύμφωνα με την άσκηση.

Στη **σελίδα 60** υπάρχουν τρεις ασκήσεις, όπου το παιδί χρησιμοποιεί διαφορετικού χρώματος λαστιχάκια για την καθεμιά για να κατασκευάσει κάποια σχήματα. Στην πρώτη άσκηση καλείται το παιδί να πάρει κόκκινο λαστιχάκι και να κατασκευάσει ένα σχήμα που να ακουμπά σε 4 καρφάκια. Σε αυτήν την περίπτωση το παιδί αναμένεται να φτιάξει τετράγωνα, τρίγωνα, πλάγια παραλληλόγραμμα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή και απλά τετράπλευρα. Στη δεύτερη με το πράσινο λαστιχάκι το παιδί πρέπει να κάνει ένα σχήμα που να ακουμπά σε 5 καρφάκια. Είναι πιθανόν να κατασκευάσει πεντάπλευρα και τετράπλευρα και στην τρίτη με το μπλε λαστιχάκι πολύγωνα τέτοια ώστε να έχουν μέσα τους 3 καρφάκια. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να αναγνωρίσουν κάποια γνωστά σχήματα που προέκυψαν από τη λύση των ασκή-

σεων και να συζητήσει μαζί τους τις ιδέες τους. Μπορεί ακόμη να προτείνει και άλλες ασκήσεις τροποποιώντας τους περιορισμούς, όπως, για παράδειγμα, να φτιάξουν ένα σχήμα που να περνά από 4 καρφάκια από τα οποία τα 3 να είναι στη σειρά. Εδώ παρατηρεί ότι μπορεί να φτιάξει μόνο διαφορετικά είδη τριγώνων. Ένα επόμενο βήμα θα είναι να παρακινηθούν τα παιδιά να τα χαρακτηρίσουν με βάση τη σχέση του τέταρτου σημείου με τα άλλα τρία, κ.ο.κ.

Στη **σελίδα 61** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει και πάλι λαστιχάκια για να κατασκευάσει ένα σπιτάκι σε πραγματικό γεωπίνακα, όπως αυτό που ήδη υπάρχει στο φύλλο εργασίας. Στο ίδιο σπιτάκι θα πρέπει το παιδί να αναγνωρίσει γνωστά σχήματα, όπως για παράδειγμα τρίγωνα, παραλληλόγραμμα, τετράγωνα από προηγούμενες εμπειρίες του από την καθημερινή του ζωή ή την πρωινή τάξη που παρακολουθεί και να τα καταγράψει στις γραμμές που υπάρχουν. Η τελευταία δραστηριότητα προτρέπει το παιδί να κατασκευάσει δικά του σπιτάκια με λαστιχάκια στο γεωπίνακα και να τα σχεδιάσει στην επόμενη σελίδα. Η δραστηριότητα αυτή προσφέρεται πάλι για να αναγνωρισθούν σχήματα που χρησιμοποίησε το παιδί για τα σπιτάκια του. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να δώσει άλλη παρόμοια δραστηριότητα με περιορισμούς, όπως για παράδειγμα να κατασκευαστεί ένα σπιτάκι μόνο με παραλληλόγραμμα ή μόνο με τετράγωνα, ή μόνο με τρίγωνα, κ.ο.κ.

Στη **σελίδα 63** το παιδί καλείται να κατασκευάσει στο γεωπίνακά του τα σχεδιασμένα σχήματα στο φύλλο εργασίας, δηλαδή μια πεταλούδα, ένα χαρταετό και έναν πύραυλο. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα επιχειρείται να οδηγηθούν τα παιδιά σε συσχετίσεις ανάμεσα σε οικεία αντικείμενα και την απεικόνισή τους με τη βοήθεια των γεωμετρικών σχημάτων. Πιθανόν να θέλει ο εκπαιδευτικός να εκμεταλλευτεί την ευκαιρία για να συζητήσει με τα παιδιά τα σχήματα από τα οποία αποτελούνται τα τρία αντικείμενα. Τα παιδιά μπορεί να βλέπουν διαφορετικά σχήματα τα οποία καλό θα ήταν να τα προσδιορίσουν, να υποστηρίξουν την άποψή τους και να τα ονομάσουν με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού. Τα παιδιά παροτρύνονται να κατασκευάσουν στο γεωπίνακά τους κι άλλα σχήματα που να πετούν, τα οποία μπορούν εναλλακτικά να ζωγραφίσουν στους σχεδιασμένους γεωπίνακες στην επόμενη σελίδα.

Στη **σελίδα 65** υπάρχει ένας σχεδιασμένος γεωπίνακας 5 x 5 και ζητείται από το παιδί να τον χωρίσει σε δύο ίσα μέρη με διαφορετικούς τρόπους. Για το σκοπό αυτό δίνεται η **σελίδα 66** με 8 ίδιους γεωπίνακες 5 x 5 αλλά σε σμίκρυνση, όπου τα παιδιά μπορούν να δοκιμάσουν τις ιδέες τους σχετικά με αυτό το χωρισμό. Στη δραστηριότητα αυτή εμπλέκονται διάφορες μαθηματικές έννοιες, όπως η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα, καθώς ο χωρισμός πρέπει να είναι τέτοιος ώστε τα δύο μέρη να είναι ίδια και όταν ενώνονται να δίνουν το αρχικό σχήμα, η έννοια του μισού στα κλάσματα, καθώς καθένα από τα δύο ίσα μέρη είναι το  $\frac{1}{2}$  του σχήματος, η έννοια μέρος-όλο, γεωμετρικά σχήματα και η μεταξύ τους σχέση, ισεμβαδικά σχήματα, κ.ο.κ. Ο εκπαιδευτικός αναδεικνύει τις διαφορετικές λύσεις που θα δώσουν τα παιδιά είτε εργαζόμενοι ανά δύο είτε σε ομάδα και οποίες συνδέονται με τις παραπάνω έννοιες. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θίξει αυτές τις έννοιες χωρίς να απαιτεί απομνημόνευση της ορολογίας αλλά στοχεύοντας κυρίως στις συνδέσεις που δίνεται η ευκαιρία στο παιδί να κάνει σε σχέση με διάφορες μαθηματικές έννοιες.

Στη **σελίδα 67** υπάρχει ένας σχεδιασμένος γεωπίνακας 5 x 5 και ζητείται από το παιδί να τον χωρίσει σε τέσσερα ίσα μέρη με διαφορετικούς τρόπους. Για το σκοπό αυτό δίνεται η **σελίδα 68** με 8 ίδιους γεωπίνακες 5 x 5 σε σμίκρυνση, όπου τα παιδιά μπορούν να δοκιμάσουν τις ιδέες τους

σχετικά με αυτό το χωρισμό. Στη δραστηριότητα αυτή εμπλέκονται αρκετές από τις έννοιες που αναφέρθηκαν για την προηγούμενη δραστηριότητα, εκτός από την έννοια της συμμετρίας. Στην περίπτωση των κλασμάτων έχουμε την έννοια του κλάσματος  $\frac{1}{4}$  και θα μπορούσαμε να θίξουμε και τη σχέση του με το  $\frac{1}{2}$  συνδυάζοντας και την προηγούμενη δραστηριότητα.

Στη **σελίδα 69** υπάρχει ένας σχεδιασμένος γεωπίνακας  $5 \times 5$  στον οποίο έχει σχηματιστεί ένα τρένο με δύο τετράγωνα βαγόνια  $2 \times 2$  (ή  $1 \times 1$  ανάλογα με το τι μετρούμε, καρφάκια ή απόσταση -εδώ μετρούμε τα καρφάκια) και μία μηχανή  $2 \times 2$  που προηγείται βέβαια των βαγονιών. Το παιδί καλείται να κατασκευάσει με τα λαστιχάκια του ένα παρόμοιο τρένο, να το απεικονίσει στο γεωπίνακα και να ονομάσει τι μέρος του τρένου είναι το κάθε βαγόνι. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η μηχανή πρέπει να θεωρηθεί βαγόνι και το κάθε βαγόνι είναι το  $\frac{1}{3}$  του τρένου. Το παιδί θα πρέπει να είναι σε θέση να αιτιολογήσει την απάντησή του. Κατόπιν καλείται να απαντήσει τι μέρος του τρένου θα είναι το κάθε βαγόνι εάν προστεθεί ένα ακόμη βαγόνι ( $\frac{1}{4}$ ) αιτιολογώντας και πάλι την απάντησή του. Η δραστηριότητα μπορεί να επεκταθεί με ένα τέταρτο βαγόνι που θα είναι το  $\frac{1}{5}$  του τρένου κ.ο.κ. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποβάλει και την αντίστροφη ερώτηση, δηλαδή "πόσα βαγόνια έχουμε όταν το κάθε βαγόνι είναι το  $\frac{1}{3}$  του τρένου" ή "σε ένα τρένο με μηχανή και τρία βαγόνια πόσα βαγόνια είναι το μισό τρένο; Το  $\frac{1}{4}$  του τρένου;", κ.ο.κ.



## Δραστηριότητες με το Τάνγκραμ

Τα Τάνγκραμ είναι γεωμετρικά παζλ που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία της γεωμετρίας κυρίως για την προσέγγιση και επεξεργασία της έννοιας της επιφάνειας και της διατήρησης της επιφάνειας. Το Τάνγκραμ είναι ένα τετράγωνο που έχει χωριστεί σε επτά κομμάτια, από τα οποία τα πέντε είναι τρίγωνα, 2 μικρά, 1 μεσαίο και 2 μεγάλα, ένα τετράγωνο και ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με τα οποία το παιδί μπορεί να κάνει πολλούς συνδυασμούς και να φτιάξει διάφορα σχήματα. Σε αυτό το επίπεδο οι δραστηριότητες με το υλικό αυτό καλύπτουν τα δύο πρώτα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele (van Hiele, 1986), δηλαδή να κατανοεί το παιδί τα σχήματα, να μπορεί να ταξινομήσει όμοια σχήματα και να αντιλαμβάνεται τις ιδιότητες των σχημάτων. Στην επίτευξη αυτού του σκοπού βοηθούν οι σχηματισμοί και μετασχηματισμοί που είναι η κυρίαρχη ιδέα στις δραστηριότητες με το Τάνγκραμ.

Στη **σελίδα 70** το παιδί καλείται να εξοικειωθεί με τα κομμάτια του Τάνγκραμ τοποθετώντας τα δικά του κομμάτια πάνω σε αυτά του φύλλου εργασίας. Ο εκπαιδευτικός με κατάλληλες ερωτήσεις βοηθά τα παιδιά να προσδιορίσουν και να ονομάσουν τα διαφορετικά μέρη του Τάνγκραμ και να βρουν πιθανές σχέσεις μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ποια τρίγωνα είναι τα μεγάλα και ποια



τα μικρά και γιατί; Μπορούν να συγκρίνουν βάζοντας το ένα πάνω στο άλλο, να μιλήσουν για διαστάσεις, για επιφάνεια-χώρο που καλύπτουν; Ποια τρίγωνα κάνουν ένα τετράγωνο; κ.λπ.

Στη **σελίδα 71** το παιδί παίρνει τα κομμάτια του Τάνγκραμ του και τα τοποθετεί πάνω στο σχέδιο που βρίσκεται στο φύλλο εργασίας και παριστάνει ένα σπιτάκι έτσι ώστε να τα ταιριάζει. Το παιδί παρατηρεί το συνδυασμό των κομματιών και το μετασχηματισμό τους σε ένα νέο σχήμα. Για παράδειγμα, παρατηρεί και ονομάζει τα κομμάτια που μπαίνουν στο κυρίως μέρος του σπιτιού και αυτά που συνθέτουν τη στέγη κ.λπ. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από το παιδί να φτιάξει ξανά το σπιτάκι εκτός του φύλλου εργασίας και να παρατηρήσει τι συμβαίνει εάν μετακινήσει κάποια κομμάτια.

Στη **σελίδα 72** το παιδί και πάλι παίρνει τα κομμάτια του Τάνγκραμ του και τα τοποθετεί πάνω στο σχέδιο που βρίσκεται στο φύλλο εργασίας και παριστάνει έναν κύκλο. Ισχύει ό,τι έχουμε αναφέρει για την προηγούμενη δραστηριότητα στην προηγούμενη παράγραφο.

Στη **σελίδα 73** το παιδί καλείται να κάνει μετασχηματισμούς των ίδιων των σχημάτων-κομματιών του Τάνγκραμ 'αναποδογυρίζοντας' το κάθε σχήμα, περιστρέφοντάς το  $180^\circ$  στον αέρα ώστε η κάτω όψη του κομματιού να αλλάξει θέση με την πάνω όψη. Με αυτό τον τρόπο τα παιδιά συνηθίζουν κινήσεις που θα πρέπει να κατακτήσουν ώστε να μπορέσουν αργότερα να χειρίζονται τα κομμάτια του Τάνγκραμ για τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιεί τα κομμάτια από το δικό του Τάνγκραμ και τα εφαρμόζει στα δοσμένα σχήματα. Το παιδί παρατηρεί εάν το 'αναποδογυρισμένο' του σχήμα ταιριάζει με το σχεδιασμένο στο φύλλο εργασίας. Συνειδητοποιεί ότι αυτό συμβαίνει μόνο με τα τρίγωνα και το τετράγωνο. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να σκεφτούν και να εκφράσουν τους λόγους για τους οποίους πιστεύουν ότι συμβαίνει αυτό. Για την κάθε περίπτωση υπάρχουν διαφορετικά επιχειρήματα που συζητούνται στην ομάδα.

Στη **σελίδα 74** το παιδί θα πρέπει να χρησιμοποιήσει κάποια κομμάτια του Τάνγκραμ για να καλύψει τα τρία δοσμένα σχήματα, τρίγωνο, τετράγωνο, πλάγιο παραλληλόγραμμο, στο φύλλο εργασίας, που είναι επίσης κομμάτια του Τάνγκραμ. Στη **σελίδα 75** μπορεί το παιδί να αναπαραστήσει τις διαφορετικές λύσεις. Εάν η δραστηριότητα δουλευτεί στην ομάδα, οι λύσεις μπορεί να προέλθουν από την ανταλλαγή των ιδεών ανάμεσα στα παιδιά. Ο εκπαιδευτικός παρακινεί τα παιδιά να παρατηρήσουν και να διατυπώσουν λεκτικά τη σχέση που έχουν οι επιφάνειες των διαφορετικών σχημάτων, δηλαδή για παράδειγμα ότι η επιφάνεια του συγκεκριμένου τετραγώνου είναι ίση με την επιφάνεια των δύο μικρών τριγώνων του Τάνγκραμ που έχουν τοποθετηθεί με κοινή την υποτείνουσα. Το ίδιο και η επιφάνεια του μεσαίου τριγώνου αλλά τα τρίγωνα τοποθετούνται με κοινή την μια κάθετο. Το ίδιο και με το παραλληλόγραμμο. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να οδηγήσει τα παιδιά να παρατηρήσουν ότι η επιφάνεια του συγκεκριμένου μικρού τριγώνου είναι μισή από την επιφάνεια του τετραγώνου, κ.ο.κ. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει τον όρο 'επιφάνεια' χωρίς να τον εξηγήσει και να ζητήσει μετά τη δραστηριότητα από τα παιδιά να τον ορίσουν με δικά τους λόγια.

Με κάλυψη επιφάνειας ασχολείται το παιδί και στη **σελίδα 76** Στο φύλλο εργασίας δίνονται τα τρία σχήματα 1, 2 και 3 που αντιστοιχούν στα τρία διαφορετικά τρίγωνα του Τάνγκραμ. Το παιδί καλείται να ανακαλύψει πόσα μικρά τρίγωνα του Τάνγκραμ χωράνε στο καθένα από αυτά τα σχήματα. Στη **σελίδα 77** το παιδί μπορεί να σχεδιάσει τις λύσεις του. Τα παιδιά μπορούν να ανταλλάξουν ιδέες και λύσεις εργαζόμενοι ατομικά στην ομάδα. Ο εκπαιδευτικός παρακινεί τα

παιδιά να περιγράψουν λεκτικά τις λύσεις και τις σχέσεις που προκύπτουν ανάμεσα στα σχήματα και να γράψουν απαντήσεις στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, δηλαδή ότι ένα μικρό τρίγωνο καλύπτει το Σχήμα 1, δύο μικρά τρίγωνα καλύπτουν το Σχήμα 2, δύο μεσαία το Σχήμα 3, τέσσερα μικρά το Σχήμα 3. Οι σχέσεις αυτές βοηθούν το παιδί να κατανοήσει ότι αυτά που διαπιστώνει, αυτά που διατυπώνει και αυτά που σχεδιάζει είναι το ίδιο πράγμα εκφρασμένο με διαφορετικούς κώδικες.

Στη **σελίδα 78** το παιδί εισάγεται στα κλάσματα με μια δραστηριότητα που σχετίζεται με ένα οικείο του παιχνίδι. Καλείται να χρωματίσει τη μισή επιφάνεια του χαρταετού με διαφορετικούς τρόπους. Ο χαρταετός είναι τετράγωνο και αποτελείται από τρίγωνα-κομμάτια του Τάνγκραμ. Το παιδί μπορεί να δει το σχήμα συνολικά ή ως μέρη ενός όλου. Σε κάθε περίπτωση μπορεί να αιτιολογήσει τις λύσεις του με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες του από τις δραστηριότητες με το Τάνγκραμ. Ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τα παιδιά να εκφράσουν τις λύσεις τους χρησιμοποιώντας κλασματικούς όρους.

Στη **σελίδα 79** το παιδί καλείται να επιλύσει ένα πρόβλημα, δηλαδή να βάλει πόρτα στην είσοδο της σκηνής. Για το σκοπό αυτό πρέπει να επιλέξει ένα από τα δύο προτεινόμενα τρίγωνα (κομμάτια του Τάνγκραμ) και να το τοποθετήσει για να σχεδιάσει την πόρτα στην είσοδο της σκηνής, η οποία είναι ένα μεγάλο τρίγωνο αποτελούμενο από δύο ίσα ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα (κομμάτια του Τάνγκραμ). Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει το τρίγωνο που θα επιλέξει δύο φορές, δηλαδή και στα δύο τρίγωνα της σκηνής με τρόπο που να είναι συμμετρικά ως προς την κοινή κάθετη πλευρά των τριγώνων, ή που να μην είναι, ή με κάποιο άλλον τρόπο. Ακόμη μπορεί να χρησιμοποιήσει το επιλεγμένο τρίγωνο μια φορά και με διαφορετικούς τρόπους. Ωστόσο σε κάθε περίπτωση πρέπει να λάβει υπόψιν του τη λειτουργικότητα της λύσης που προτείνει καθώς το πρόβλημα είναι ρεαλιστικό. Τόσο σε αυτή την περίπτωση, όπως και στην περίπτωση της **σελίδας 78** με τον χαρταετό, τα πλαίσια στα οποία μελετούμε τα προβλήματα είναι κοινωνικοπολιτιστικά και μπορεί να παίξουν ρόλο για το είδος των λύσεων που θα δώσουν τα παιδιά καθώς συνδέονται με τις εμπειρίες των παιδιών από την καθημερινή τους ζωή. Κατόπιν το παιδί καλείται να προσδιορίσει με κλάσμα τι μέρος του τριγώνου-είσοδου της σκηνής αποτελεί η πόρτα που τοποθέτησε. Εδώ οι απαντήσεις εξαρτώνται από τις λύσεις που έχουν δοθεί. Τα παιδιά θα πρέπει να παρακινηθούν να αιτοπλογήσουν τις απαντήσεις τους.



## Δραστηριότητες με τα πεντόμινο

Το πεντόμινο είναι ένα σχήμα που δημιουργείται αν συνδέσουμε πέντε τετράγωνα σαν να τα έχουμε κόψει από έναν καμβά με τετραγωνάκια. Κάθε τετράγωνο πρέπει να έχει τουλάχιστον μια πλευρά κοινή με ένα άλλο. Με τα πεντόμινο δουλεύουμε έννοιες όπως η επιφάνεια, η κάλυψη της επιφάνειας, η διατήρηση της επιφάνειας, η μέτρηση επιφανειών, οι ισοδύναμες επιφάνειες. Τα κομμάτια πεντόμινο θα δοθούν έτοιμα στα παιδιά. Ωστόσο για να εξοικειωθούν τα παιδιά καλύτερα με το υλικό και με τη σχέση που διέπει την κατασκευή και χρήση του μπορεί ο εκπαιδευτικός να δώσει σε κάθε παιδί 5 όμοια τετράγωνα πλακάκια και ένα κομμάτι χαρτί για να προσπαθήσει να βρει όσο το δυνατόν περισσότερα διαφορετικά πεντόμινο. Μπορεί να βρουν και τα 12 διαφορετικά πεντόμινο ή να επαναλαμβάνουν κάποια χωρίς να τα αναγνωρίζουν. Τα παιδιά μπορεί να συνεργαστούν ανά δύο ή ατομικά και να συγκρίνουν τα πεντόμινο τους και να καταλήξουν στα 12 που θα αποδεχτούν όλοι.

Στις **σελίδες 80** και **81** το παιδί καλείται να πάρει έτοιμα κομμάτια πεντόμινο από το διαθέσιμο χειραπτικό υλικό και να τα εφαρμόσει στα σχέδια του φύλλου εργασίας. Σε κάθε φύλλο εργασίας υπάρχουν 6 διαφορετικά πεντόμινο έτσι ώστε να εξαντλούνται όλες οι περιπτώσεις και στα δύο φύλλα εργασίας. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να του πουν τι παρατηρούν και σε περίπτωση που δεν έχει προηγηθεί η δραστηριότητα που περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο, μπορεί η παρατήρηση να οδηγήσει τα παιδιά στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν 12 διαφορετικές δυνατές περιπτώσεις.

Η **σελίδα 82** απαιτεί πιο σύνθετη διαδικασία από τις δύο προηγούμενες σελίδες. Το παιδί καλείται να βρει από το χειραπτικό υλικό εκείνα τα δύο κομμάτια που ταιριάζουν στα δοσμένα κομμάτια ώστε να φτιάξει τα δοσμένα σχήματα. Η στρατηγική που θα δοκιμάσει το παιδί μπορεί να είναι 'η δοκιμή και πλάνη'. Ωστόσο η ύπαρξη διαχωριστικών γραμμών μπορεί να οδηγήσει το παιδί να παρατηρήσει τα χαρακτηριστικά που θα πρέπει να έχουν τα κομμάτια και να κάνει ευκολότερα την επιλογή. Για παράδειγμα μπορεί να δει ότι το ένα θα έχει τέσσερα συνεχόμενα και ένα μέρη και το άλλο τρία και δύο. Η πρόκληση σε αυτή τη σελίδα είναι να αντιληφθεί το παιδί ότι τα ίδια κομμάτια πεντόμινο συνδυαζόμενα με διαφορετικό τρόπο δίνουν διαφορετικά σχήματα. Κατόπιν το παιδί διαλέγει δύο άλλα κομμάτια πεντόμινο και στον καμβά που δίνεται στη **σελίδα 83** κατασκευάζει δύο δικά του σχήματα. Η εργασία αυτή είναι πιο ελεύθερη από την προηγούμενη και χρειάζεται το παιδί να βάλει τα κομμάτια που έχει επιλέξει με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει έστω μια κοινή πλευρά για να είναι ένα σχήμα ενιαίο.

Στη **σελίδα 84** επαναλαμβάνεται η εργασία της σελίδας 76, μόνο που αυτή τη φορά το παιδί πρέπει να βρει τρία κομμάτια τα οποία συνδυαζόμενα με δύο διαφορετικούς τρόπους δίνουν δύο διαφορετικά αποτελέσματα. Κατόπιν διαλέγει τέσσερα κομμάτια για να φτιάξει τις δικές του συνθέσεις στον καμβά της **σελίδας 85**.

Η δραστηριότητα στη **σελίδα 86** είναι πιο απαιτητική από αυτές που προηγήθηκαν. Το παιδί πρέπει να βρει δύο κατάλληλα πεντόμινο για να φτιάξει τον αριθμό 4 που δίδεται σχεδιασμένος στο φύλλο εργασίας αλλά χωρίς να είναι χωρισμένος σε τετραγωνάκια. Μια στρατηγική που μπορεί να σκεφτεί το παιδί είναι η 'δοκιμή και πλάνη'. Δοκιμάζει δηλαδή διάφορα κομμάτια μέχρι να επιτύχει το φτιάξει τον αριθμό με αυτά. Μια άλλη στρατηγική είναι να παρατηρήσει καλά το σχήμα και να σκεφτεί τι μορφή θα έχουν αυτά τα κομμάτια που θα πρέπει να επιλέξει. Δηλαδή να παρατηρήσει ότι το ένα κομμάτι θα πρέπει να έχει γωνία με 3 και 2 και το άλλο να είναι μονοκόμματο με 5, κ.ο.κ. Το παιδί καλείται να φτιάξει τον αριθμό 6 με δύο κομμάτια πεντόμινο και να τον σχεδιάσει στον καμβά της επόμενης σελίδας. Τα παιδιά μπορεί να δουλέψουν ανά δύο ή σε ομάδα και να ανταλλάξουν ιδέες. Μια ιδέα μπορεί να είναι να χρησιμοποιήσουν την εμπειρία που αποκτήθηκε από τη δραστηριότητα με τον αριθμό 4. Μπορούν να πάρουν τον 4 και με κατάλληλες προσθήκες να τον κάνουν 6. Σε αυτή την περίπτωση μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα δύο κομμάτια πεντόμινο που χρησιμοποίησαν για το 4 και άλλο ένα. Μια άλλη στρατηγική θα είναι να σχεδιάσουν πάνω στον καμβά το 6 και κατόπιν με 'δοκιμή και πλάνη' να ψάξουν τα κομμάτια πεντόμινο που τους εξυπηρετούν, κ.ο.κ.

Στα επόμενα φύλλα εργασίας στις **σελίδες 88** έως **89** υπάρχουν δραστηριότητες που βασίζονται στις γεωμετρικές έννοιες της μεταφοράς-ομοιοθεσίας, ανάκλασης-συμμετρίας ως προς άξονα, και περιστροφής. Στα φύλλα εργασίας δεν χρησιμοποιούνται αυτοί οι όροι αλλά 'σέρνω', 'αναποδογυρίζω' και 'περιστρέφω' αντίστοιχα. Οι δραστηριότητες αυτές δίνουν την ευκαιρία στα παιδιά να 'δουν' τη δυναμική που διέπει τις γεωμετρικές έννοιες και να ξεπεράσουν τα εμπόδια των 'στερεοτύπων' που εύκολα μπορεί να εμφανιστούν από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται γενικότερα η διδασκαλία της γεωμετρίας, δηλαδή βασιζόμενη κυρίως σε ζωγραφισμένα σχήματα είτε στα εγχειρίδια είτε στον πίνακα, όπου τα σχήματα είναι παγιωμένα σε συγκεκριμένες θέσεις και η μελέτη διαφόρων ιδιοτήτων τους γίνεται πάνω σε αυτά.

Στη **σελίδα 88** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει δύο συγκεκριμένα κομμάτια πεντόμινο σαν και αυτά που είναι στο φύλλο εργασίας. Κατόπιν να τα τοποθετήσει πάνω στα δοσμένα σχήματα και να τα σύρει πάνω στο φύλλο εργασίας ώστε να βρει νέες θέσεις και να σχεδιάσει το περίγραμμά τους. Η κατεύθυνση προς την οποία σύρονται τα κομμάτια δίνονται από τα βέλη. Η εργασία είναι ατομική αλλά μπορεί τα παιδιά να συζητήσουν ανά δύο για το πού θα τοποθετήσουν τα κομμάτια. Η μεταφορά δεν περιορίζει το σύρσιμο των κομματιών μόνο οριζόντια ή και σε μια συγκεκριμένη απόσταση. Μάλλον είναι οι διαστάσεις του φύλλου εργασίας που μπορεί να επιβάλουν αυτούς τους περιορισμούς. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να τονίσει ότι εκείνο που έχει σημασία στη συγκεκριμένη μαθηματική κίνηση είναι να μην αλλάξει η σχέση του κομματιού με το επίπεδο, για παράδειγμα να μη γίνει το Χ (πρώτο κομμάτι) σταυρός. Τόσο σε αυτή όσο και στην επόμενη περίπτωση της μεταφοράς είναι σημαντικό να παρατηρήσει το παιδί ότι το σχήμα παραμένει το ίδιο, αναλλοίωτο και ότι στη δεύτερη περίπτωση της μεταφοράς αυτό που αλλάζει είναι ο προσανατολισμός του σχήματος στο επίπεδο (πιο πάνω - βόρεια, πιο κάτω - νότια κ.ο.κ.).

Στη **σελίδα 89** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει δύο συγκεκριμένα κομμάτια πεντόμινο σαν και αυτά που είναι στο φύλλο εργασίας. Κατόπιν να τα τοποθετήσει πάνω στα δοσμένα σχήματα και να τα περιστρέψει πάνω στο φύλλο εργασίας με όποια γωνία θέλει ώστε να βρει νέες θέσεις και να σχεδιάσει το περίγραμμά τους. Το παιδί είναι ελεύθερο να κάνει την περιστροφή του όπως θέλει πιθανόν ενεργοποιώντας τη διαίσθησή του, ωστόσο ο εκπαιδευτικός μπορεί να

συζητήσει με τα παιδιά τις διαφορετικές θέσεις που επέλεξαν και το πώς έγινε αυτή η επιλογή, ώστε να προσπαθήσουν να συνειδητοποιήσουν τις ενέργειές τους.

Η **σελίδα 90** περιλαμβάνει τρεις ασκήσεις εμπέδωσης των δύο γεωμετρικών εννοιών που προσεγγίστηκαν στα δύο προηγούμενα φύλλα εργασίας, ώστε να συνδεθούν οι όροι 'σύρω' και 'περιστρέφω' με τις ανάλογες κινήσεις και το αποτέλεσμα. Στην πρώτη άσκηση το κομμάτι σχήματος Z σύρεται οριζόντια, στη δεύτερη το κομμάτι W περιστρέφεται κατά  $180^\circ$  και στην τρίτη περίπτωση το κομμάτι περιστρέφεται κατά  $90^\circ$ . Τα παιδιά μπορεί να μην αντιλαμβάνονται την περιστροφή σε μοίρες αλλά αν ο εκπαιδευτικός κρίνει απαραίτητο μπορεί να χρησιμοποιήσει τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις των  $180^\circ$  και  $90^\circ$  για να οργανώσει μία συζήτηση πάνω σε αυτό το θέμα. Επιπλέον ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να θέσει τον προβληματισμό κατά πόσον το σύρσιμο είναι μια περιστροφή κατά  $360^\circ$  ή  $0^\circ$ .

Στη **σελίδα 91** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει δύο συγκεκριμένα κομμάτια πεντόμινο σαν και αυτά που είναι στο φύλλο εργασίας. Κατόπιν να τα τοποθετήσει πάνω στα δοσμένα σχήματα στο φύλλο εργασίας, να τα αναποδογυρίσει καθένα χωριστά στον κενό χώρο σύμφωνα με τα βέλη και να σχεδιάσει τα περιγράμματά τους στις νέες τους θέσεις. Η ενέργεια αυτή είναι πιθανόν να δυσκολέψει κάποια παιδιά στο πώς θα 'αναποδογυρίσουν' το κομμάτι γι αυτό θα ήταν καλό να συζητήσουν ανά δύο ή στην ομάδα τις ιδέες τους και να κάνουν δοκιμές σε κάποιο άλλο φύλλο χαρτιού πριν μεταφέρουν μια επιτυχημένη πρακτική στο φύλλο εργασίας. Και σε αυτή την περίπτωση της ανάκλασης ή συμμετρίας ως προς άξονα (εξωτερικό) θα ήταν χρήσιμο να συζητήσει ο εκπαιδευτικός με τα παιδιά και να τους ζητήσει να παρατηρήσουν εάν κάποιο χαρακτηριστικό του κομματιού άλλαξε. Τα παιδιά ακόμη μπορούν να παρατηρήσουν τη σχέση ανάμεσα στο ένα σχήμα και το άλλο. Για παράδειγμα στο πρώτο σχήμα τόσο στο ίδιο όσο και στο συμμετρικό του τα πάνω μέρη κοιτάνε προς τα έξω ενώ τα κάτω προς τα μέσα, κ.ο.κ.

Στη **σελίδα 92** υπάρχουν δύο στήλες και τρεις σειρές με πεντόμινο. Στην πρώτη στήλη στην πρώτη σειρά υπάρχει ένα κομμάτι και στη δεύτερη στήλη πρώτη σειρά τρία κομμάτια. Το παιδί καλείται να αναγνωρίσει με ποιο κομμάτι της δεύτερης στήλης ταιριάζει το κομμάτι της πρώτης στήλης και ποια μεταβολή της θέσης του έχει υποστεί (μεταφορά, ανάκλαση, περιστροφή). Αυτή η εργασία επαναλαμβάνεται και για τις τρεις σειρές. Στην πρώτη περίπτωση το κομμάτι έχει υποστεί ανάκλαση, στη δεύτερη και την τρίτη έχει υποστεί περιστροφή κατά  $90^\circ$ . Η άσκηση ζητά στο τέλος από το παιδί να πει τι έκανε για να βρει την κάθε περίπτωση. Τα παιδιά μπορεί να έχουν χρησιμοποιήσει διαφορετικές στρατηγικές αναγνώρισης του κομματιού στη νέα του κατάσταση. Αναπτύσσοντας και εξηγώντας τις στρατηγικές τους τα παιδιά θα οδηγηθούν και στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών που προσδιορίζουν τις διαφορετικές μεταβολές της θέσης των σχημάτων.

Στη **σελίδα 93** τρία κομμάτια πεντόμινο έχουν υποστεί κάποια μεταβολή θέσης, το πρώτο περιστροφή ( $90^\circ$ ), το δεύτερο περιστροφή ( $180^\circ$ ), το τρίτο σύρσιμο ή αναποδογύρισμα. Στην τελευταία περίπτωση επειδή το κομμάτι έχει άξονα συμμετρίας (εσωτερικό) υπάρχουν δύο λύσεις, τις οποίες ο εκπαιδευτικός δέχεται ζητώντας παράλληλα αιτιολόγηση. Το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει κομμάτια πεντόμινο όμοια με αυτά του φύλλου εργασίας και να βρει ποια από τις τρεις μεταβολές θέσης ταιριάζει σε κάθε κομμάτι-σχήμα ('σύρω', 'περιστρέφω', 'αναποδογυρίζω') σημειώνοντας πώς πήγε από το ένα σχήμα στο άλλο. Έτσι θα συνειδητοποιήσει σε ποιο βαθμό έχει κατανοήσει τις διαφορές ανάμεσα στις τρεις μεταβολές θέσης.

## Προβλήματα με εικόνες, αριθμούς και λόγια

Οι τρεις σελίδες που ακολουθούν περιλαμβάνουν εικονογραφημένα προβλήματα. Η τοποθέτηση του προβλήματος μέσα σε μια ιστορία με εικόνες στηρίζεται στην ιδέα ότι σε ένα πλαίσιο ελκυστικό και το παιδί θα ασχοληθεί με το πρόβλημα που το συνοδεύει και θα αντλήσει πληροφορίες-δεδομένα από τις εικόνες για να το λύσει. Το παιδί ασκείται στην παρατήρηση και προσεκτική 'ανάγνωση' της εικόνας με στόχο την αποκωδικοποίηση των μηνυμάτων που εκφέρουν οι εικόνες της καθημερινής ζωής. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ενθαρρύνει τη λεκτική απόδοση της ιστορίας από το παιδί έτσι ώστε να αναδεικνύονται τα μαθηματικά στοιχεία με σαφήνεια και οικονομία στο λόγο.

Τα προβλήματα της **σελίδας 94** αφορούν σε προσθέσεις μονοψήφιων αριθμών. Δίνεται ένα πρόβλημα-παράδειγμα. Το δεύτερο πρόβλημα έχει τους ίδιους προσθετέους με το πρώτο αλλά το παιδί πρέπει να βρει τον δεύτερο προσθετέο και να διηγηθεί την ιστορία με τις πεταλούδες πάνω στην οποία στηρίζεται το πρόβλημα βοηθούμενο από τις σχετικές εικόνες. Το τρίτο πρόβλημα έχει τους ίδιους προσθετέους με τα άλλα δύο αλλά τώρα πρέπει να τους βρει το παιδί και να γράψει την πράξη και το αποτέλεσμα στηριζόμενο στις εικόνες.

Η **σελίδα 95** είναι στο ίδιο πνεύμα με την προηγούμενη σελίδα και έχει την ίδια ακριβώς δομή αλλά αφορά στην αφαίρεση. Η μόνη διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη σελίδα είναι ότι οι τρεις αφαιρέσεις με τις οποίες λύνονται τα τρία προβλήματα έχουν διαφορετικούς μονοψήφιους αριθμούς στη θέση των μειωτέων και αφαιρετέων.

Η **σελίδα 96** είναι παρόμοια με την προηγούμενη-αφορά στην αφαίρεση- όμως αυτή τη φορά δεν δίνεται παράδειγμα και το παιδί καλείται να συμπληρώσει μόνος τις πράξεις στηριζόμενος στην πληροφορία της εικόνας.

Η **σελίδα 97** στηρίζεται στην ιδέα του σχηματισμού ενός αριθμού από άλλους αριθμούς που μετασχηματίζονται με πράξεις. Στο φύλλο εργασίας αυτό το παιδί καλείται να βρει αθροίσματα τριών προσθετέων, διαφορές δύο αριθμών και συνδυασμούς αθροισμάτων και διαφορών που έχουν ως αποτέλεσμα το 15. Τα παιδιά μπορούν να βρουν μόνοι τους όσα αθροίσματα, διαφορές και συνδυασμούς χωράνε στα αντίστοιχα κουτάκια αλλά και άλλους που μπορεί ο εκπαιδευτικός να σημειώσει στον πίνακα. Εάν τα παιδιά έχουν ακολουθήσει μια συγκεκριμένη στρατηγική, την παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους και τη συζητούν.

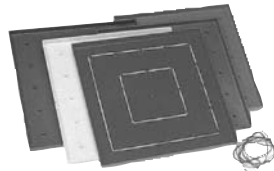
Στη **σελίδα 98** το παιδί καλείται να συμπληρώσει τους αριθμούς που λείπουν. Οι αριθμοί κινούνται μέσα στην εικοσάδα.

Οι **σελίδες 99** και **100** περιλαμβάνουν 5 προβλήματα. Τα παιδιά μπορούν να συνεργαστούν για να τα λύσουν. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τα παιδιά να εκφράσουν τη σκέψη τους για τις πράξεις που χρειάζεται να κάνουν και να δίνουν εκτίμηση του αποτελέσματος (περίπου αποτέλεσμα, τάξη μεγέθους-διψήφιος, μονοψήφιος κ.λπ.). Επιπλέον μπορεί να βοηθά στην κατανόηση του προβλήματος κυρίως όταν υπάρχουν αναγνωστικές δυσκολίες που την εμποδίζουν εφαρμόζοντας διάφορες τεχνικές, όπως για παράδειγμα την καταγραφή των πληροφοριών-δεδομένων, την καταγραφή των ερωτήσεων και τη σύνδεσή των δύο μερών μέσα από την πράξη.

Το πρώτο πρόβλημα αφορά σε πρόσθεση διψήφιων αριθμών και το δεύτερο σε πρόσθεση μονοψήφιων. Το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα έχουν από δύο ερωτήσεις που απαντώνται με

μια πρόσθεση και μια αφαίρεση για το κάθε πρόβλημα. Το πέμπτο πρόβλημα τοποθετείται στο πλαίσιο ενός εστιατορίου και αντί για εκφώνηση δίνονται οι πληροφορίες σε έναν πίνακα. Ένα ζήτημα που θα προκύψει για συζήτηση στην τάξη είναι η ανάγκη μιας κοινής μονάδας μέτρησης καθόσον οι τιμές των φαγητών δίνονται σε λεπτά και τα χρήματα που διαθέτει το παιδί είναι σε ευρώ. Το παιδί χρειάζεται να κάνει πέντε προσθέσεις και πέντε αφαιρέσεις για να απαντήσει στις ερωτήσεις του προβλήματος. Οι πράξεις μπορούν να γίνονται πρώτα νοερά και μετά να επιβεβαιωθούν με πράξεις με μολύβι και χαρτί ή αριθμομηχανή. Έμφαση πιθανόν να χρειάζεται να δοθεί στην ανάγκη μετατροπής των ακεραίων σε δεκαδικούς για να γίνουν οι πράξεις και γραπτά, οριζόντια και κάθετα. Ο εκπαιδευτικός κρίνει τι χρειάζεται να γίνει και πώς θα το χειριστεί.

## Δεύτερο επίπεδο



### Δραστηριότητες με το γεωπίνακα (μέρος Α)

Για το γεωπίνακα και τη χρήση του υπάρχει σχετική αναφορά και στις δραστηριότητες του Επιπέδου 1. Οι δραστηριότητες με το γεωπίνακα στα αμέσως επόμενα φύλλα εργασίας αναφέρονται στα γεωμετρικά σχήματα και τα εμβάδά τους.

Στη **σελίδα 7** δίνεται ένα αεροπλανάκι σχεδιασμένο σε ένα σχεδιασμένο γεωπίνακα. Το παιδί καλείται να κατασκευάσει με τα λαστιχάκια του στο γεωπίνακά του το αεροπλανάκι που βλέπει στο φύλλο εργασίας και κατόπιν να κατασκευάσει δικά του αεροπλανάκια στη **σελίδα 8** με τους δύο σχεδιασμένους γεωπίνακες. Είναι πιθανό να μπορέσει το παιδί να διακρίνει μέρη του αεροπλάνου που του θυμίζουν γνωστά γεωμετρικά σχήματα, όπως για παράδειγμα τα μπροστινά πτερύγια-τρίγωνα ή μεγάλο τρίγωνο και τα πίσω πτερύγια-τραπέζια ή μεγάλο τραπέζιο, κ.ο.κ. Για τα άλλα μέρη που το παιδί δεν μπορεί να αναγνωρίσει ο εκπαιδευτικός οργανώνει συζήτηση και προτείνονται ιδέες που καλό είναι να αιτιολογούνται. Για παράδειγμα το μέρος του αεροπλάνου χωρίς τα φτερά του είναι ένα είδος ρόμβου. Γιατί; Σε τι διαφέρει από του συνηθισμένους ρόμβους, κ.λπ. Επίσης, το μπροστινό μέρος του αεροπλάνου είναι μη κυρτό εξάπλευρο; Γιατί; Μοιάζει με το κανονικό εξάγωνο; Σε τι διαφέρει κ.λπ. Κατά την κατασκευή τα παιδιά πρέπει να τοποθετήσουν το αεροπλανάκι διαγώνια για να 'χωρέσει' στο γεωπίνακά τους. Το πώς θα τοποθετήσουν τα παιδιά τα λαστιχάκια στο γεωπίνακα έχει επίσης ενδιαφέρον για τον εκπαιδευτικό γιατί θα μπορέσει να αναγνωρίσει τις ικανότητες προσανατολισμού των παιδιών. Τα αεροπλανάκια των παιδιών μπορεί να μην χαρακτηρίζονται από συμμετρία ως προς άξονα. Εάν το παιδί αναζητά τη συμμετρία στην κατασκευή του χωρίς να τα καταφέρνει, ο εκπαιδευτικός παρεμβαίνει και συζητά μαζί του για τη βελτίωση της κατασκευής του ως προς αυτόν τον παράγοντα.

Στη **σελίδα 9** το παιδί καλείται να κατασκευάσει τετράπλευρα στο γεωπίνακα με τα λαστιχάκια του, κατόπιν να μεταφέρει τα σχήματά του στην επόμενη όπου υπάρχουν 8 σχεδιασμένοι γεωπίνακες, να τα ονομάσει και τέλος να δει τα σχήματα που κατασκεύασαν οι συμμαθητές του. Στο φύλλο εργασίας παρουσιάζονται οι δύο κατηγορίες τετραπλεύρων, τα κυρτά και τα μη κυρτά. Υπάρχει περίπτωση να χρειαστεί να γίνει μια συζήτηση για τα μη κυρτά τετράπλευρα εάν τα παιδιά δεν τα αναγνωρίζουν ως τετράπλευρα. Για παράδειγμα, μπορεί να συνδεθεί η ονομασία με τις ιδιότητές τους, δηλαδή τέσσερις πλευρές άρα τετράπλευρα, ενώ αν βάλω το χάρακα πάνω



στην κάθε πλευρά του τετραπλεύρου δεν μένει πάντα όλο το σχήμα προς την ίδια πλευρά άρα μη κυρτό. Αναμένεται να κατασκευάσει το παιδί και κάποια γνωστά τετράπλευρα, όπως τετράγωνα, ρόμβους, παραλληλόγραμμα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τραπέζια ισοσκελή και μη που έχει ήδη συναντήσει σε προηγούμενες δραστηριότητες και να προσπαθήσει να θυμηθεί τις ονομασίες τους. Η συνεργασία των παιδιών ανά δύο ή στην ομάδα αλλά και ο εκπαιδευτικός βοηθούν προς αυτή την κατεύθυνση. Εάν ο εκπαιδευτικός θέλει να επεκτείνει τη δραστηριότητα, μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να συνεργαστούν και να κατηγοριοποιήσουν τα τετράπλευρα που έχουν φτιάξει βάζοντας μόνοι τους κάποια κριτήρια (κυρτά και μη κυρτά, ορθογώνια και μη ορθογώνια, κ.λπ.). Μια άλλη επέκταση μπορεί να αφορά την περίμετρο των τετραπλεύρων, ή τη σχέση ανάμεσα στις περιμέτρους κ.λπ.

Στη **σελίδα 11** το παιδί έρχεται σε επαφή με την έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του. Σε αυτό το φύλλο εργασίας υπάρχει ένας σχεδιασμένος γεωπίνακας στον οποίο ένα χρωματισμένο τετραγωνάκι (ένα τετραγωνικό εκατοστό) αντιστοιχεί σε μία τετραγωνική μονάδα. Η μονάδα δεν ονομάζεται γιατί αυτό που εδώ ενδιαφέρει είναι να αντιληφθεί το παιδί ότι η επιφάνεια ενός τετραγώνου είναι το εμβαδόν του που το μετράμε με μικρά τετράγωνα διάστασης  $1 \times 1 = 1$  τετραγωνική μονάδα.

Στη **σελίδα 12** το παιδί καλείται να σχεδιάσει διάφορα τετράγωνα -υπάρχουν 8 σχεδιασμένοι γεωπίνακες- που θα έχει κατασκευάσει προηγουμένως στο γεωπίνακα με τα λαστιχάκια. Κατόπιν πρέπει να εκφράσει το εμβαδόν τους σε τετραγωνικές μονάδες. Στο συγκεκριμένο γεωπίνακα μπορεί να κατασκευαστούν το πολύ 8 τετράγωνα διαφορετικού εμβαδού. Αναμένεται να κατασκευάσουν τα παιδιά τα τετράγωνα με εμβαδόν 1, 4, 9 και 16 τετραγωνικές μονάδες, κινούμενοι οριζόντια και κατακόρυφα στο επίπεδο που ορίζει ο γεωπίνακας. Τα παιδιά προτρέπονται να αναζητήσουν τα υπόλοιπα τετράγωνα μέσω και του επόμενου φύλλου εργασίας. Σε αυτό το σημείο μπορεί ο εκπαιδευτικός να προκαλέσει μια συζήτηση στην τάξη για τους περιορισμούς που θέτει κάποιες φορές το υλικό και να προτρέψει τα παιδιά να κατασκευάσουν σε κάποια άλλα φύλλα εργασίας δικά τους μεγαλύτερα τετράγωνα και να μετρήσουν το εμβαδόν τους ή αντίστροφα να σκεφτούν ένα εμβαδόν και να δουν τι χαρτί χρειάζονται για να το σχεδιάσουν. Σε αυτή τη δεύτερη περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι προετοιμασμένος ότι μια σειρά από καινούρια ζητήματα μπορεί να προκύψουν, όπως ότι κάθε αριθμός δεν είναι εύκολο να αντιστοιχεί σε εμβαδόν τετραγώνου, ότι οι τετραγωνικές μονάδες μπορεί να είναι τετραγωνικά εκατοστά αλλά μπορεί και κάτι άλλο, κ.ο.κ.

Στη **σελίδα 13** το παιδί αναλαμβάνει να βοηθήσει τον Διόδωρο και να απαντήσει εάν το σχήμα που είναι σχεδιασμένο στο γεωπίνακα είναι τετράγωνο. Εδώ ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να διαπραγματευτεί μια γνωστή στη διδακτική των μαθηματικών παρανόηση των παιδιών -και αρκετές φορές των ενηλίκων- σύμφωνα με την οποία τα σχήματα αναγνωρίζονται μόνο σε συγκεκριμένες θέσεις. Στην προκειμένη περίπτωση είναι πιθανόν τα παιδιά να αναγνωρίζουν το σχήμα μόνο ως ρόμβο και όχι ως τετράγωνο. Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται ο εκπαιδευτικός να προκαλέσει συζήτηση και να ζητήσει επιχειρήματα για τη μια ή την άλλη άποψη των παιδιών. Στόχος του εκπαιδευτικού θα είναι μέσα από την ανάπτυξη των επιχειρημάτων να αναδειχθούν οι ιδιότητες των σχημάτων, να δοθεί κίνηση στα σχήματα - περιστρέφουμε το χαρτί ή το γεωπίνακα κ.λπ.- και να κλονισθούν οι όποιες παρανοήσεις των παιδιών. Για τη δεύτερη ερώτηση που είναι η εύρεση του εμβαδού του σχήματος ο εκπαιδευτικός αφήνει ελεύθερους τα παιδιά να

αναπτύξουν στρατηγικές και να χρησιμοποιήσουν ό,τι υλικό θέλουν για να βρουν ότι το εμβαδόν είναι 2 τετραγωνικές μονάδες. Τα παιδιά μπορούν να χωρίσουν το τετράγωνο σε 4 ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα εμβαδού  $\frac{1}{2}$  τετραγωνικής μονάδας ή σε 2 ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα εμβαδού 1 τετραγωνικής μονάδας.

Ένα τετράγωνο με εμβαδόν 5 τετραγωνικές μονάδες είναι αυτό με κορυφές που έχουν συντεταγμένες (1, 4), (2, 2), (3, 5) και (4, 3) [όπου (1,1) είναι το πρώτο κάτω αριστερά καρφάκι του γεωπίνακα]. Ο υπολογισμός του εμβαδού μπορεί να προκύψει χωρίζοντας το σχήμα σε μικρότερα μέρη τα οποία θα είναι τετράγωνα, η ορθογώνια τρίγωνα των οποίων μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το εμβαδόν. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν είναι απαραίτητη η χρήση τύπων εμβαδού. Ακόμη και για αυτά τα ορθογώνια τρίγωνα, το εμβαδόν τους μπορεί να υπολογιστεί ως το μισό ενός τετραγώνου ή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Μπορούν να γίνουν κι άλλα όμοια τετράγωνα σε διαφορετικές συντεταγμένες. Το τετράγωνο που οι κορυφές του έχουν συντεταγμένες (1, 3), (3, 1), (3, 5) και (5,3) έχει εμβαδόν 8 τετραγωνικές μονάδες και μπορεί να υπολογιστεί και πάλι με ολόκληρα ή και μισά τετράγωνα ή/και ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Το τετράγωνο που οι κορυφές του έχουν συντεταγμένες (1, 4), (2, 1), (4, 5) και (5, 2) έχει εμβαδόν 10 τετραγωνικές μονάδες και ο υπολογισμός του μπορεί να προκύψει με τρόπο ανάλογο με αυτόν που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως. Μπορούν να γίνουν κι άλλα όμοια τετράγωνα των 10 τετραγωνικών μονάδων σε διαφορετικές συντεταγμένες.



### Δραστηριότητες με τα πεντόμινο

Στο Επίπεδο 1 εξηγούμε τι είναι το υλικό αυτό, πού και πώς χρησιμοποιείται. Για να εξοικειωθούν τα παιδιά καλύτερα με το υλικό -εφόσον έχουν περάσει απευθείας στο επίπεδο 2 χωρίς να έχει προηγηθεί το επίπεδο 1- και με τη σχέση που διέπει την κατασκευή και χρήση του μπορεί ο εκπαιδευτικός να δώσει σε κάθε παιδί 5 όμοια τετράγωνα πλακάκια και ένα κομμάτι χαρτί για να προσπαθήσει να βρει όσο το δυνατόν περισσότερα διαφορετικά κομμάτια του πεντόμινο. Τα παιδιά μπορεί να βρουν και τα 12 διαφορετικά πεντόμινο ή να επαναλαμβάνουν κάποια χωρίς να τα αναγνωρίζουν. Τα παιδιά μπορεί να συνεργαστούν ανά δύο ή ατομικά και να συγκρίνουν τα πεντόμινο τους και να καταλήξουν στα 12 που θα αποδεχτούν όλοι.

Στις **σελίδες 15 και 16** το παιδί καλείται να πάρει έτοιμα κομμάτια πεντόμινο από το διαθέσιμο χειραπτικό υλικό και να καλύψει τα σχέδια-πεντόμινο του φύλλου εργασίας. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να του πουν τι παρατηρούν και σε περίπτωση που δεν έχει προηγηθεί η δραστηριότητα που περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο μπορεί η παρατήρηση να οδηγήσει τα παιδιά στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν 12 διαφορετικές δυνατές περιπτώσεις κομματιών πεντόμινο.

Στη **σελίδα 17** το παιδί καλείται να επιλέξει τέσσερα συγκεκριμένα κομμάτια πεντόμινο που είναι σχεδιασμένα στο φύλλο εργασίας και να ξεχωρίσει τρία από αυτά για να καλύψει την αυλή του σχολείου που δίνεται στο φύλλο εργασίας. Το πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση. Πριν λύσει το πρόβλημα πάνω στο χαρτί το παιδί καλείται να το λύσει νοερά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει λίγα λεπτά καιρό στα παιδιά για να σκεφτούν τη λύση και κατόπιν να ανταλλάξουν τις ιδέες τους ανά δύο ή στην ομάδα και να αποφασίσουν μια κοινή λύση. Είναι πιθανόν το παιδί να ξεκινήσει από το να αποκλείσει κάποιο κομμάτι από την αρχή και να ξέρει να πει το γιατί. Για παράδειγμα εάν παρατηρήσει ότι το κομμάτι έχει 5 συνεχόμενα τετράγωνα και στο προς κάλυψη σχήμα δεν υπάρχουν 5 τέτοια τετράγωνα θα αποκλείσει αυτό το κομμάτι και θα μπορεί να πει ή να περιγράψει το λόγο του αποκλεισμού. Σε αντίθετη περίπτωση τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα και το παιδί προχωρά με νοερή δοκιμή και πλάνη. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιτρέψει να χωριστεί το σχέδιο σε τετράγωνα, εάν κάποιο παιδί το ζητήσει, ή να το προτείνει και ο ίδιος, και μετά να μαντέψουν τα παιδιά τους συνδυασμούς. Οι ομάδες που βρίσκουν τη λύση την επαληθεύουν βάζοντας τα κομμάτια πάνω στο φύλλο εργασίας. Εάν στην ομάδα υπάρχει διαφωνία, καταγράφονται οι προτεινόμενες λύσεις και δοκιμάζονται στο φύλλο εργασίας μέχρι να βρεθεί η σωστή.

Στη **σελίδα 18** δίνεται ένα σχέδιο και δύο ομάδες από τρία διαφορετικά κομμάτια πεντόμινο η καθεμιά. Το παιδί καλείται να επιλέξει μια από τις δύο ομάδες κομματιών πρώτα νοερά και κατόπιν να τα τοποθετήσει πάνω στο χαρτί για να καλύψει με αυτά το σχέδιο. Το πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση. Όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα προτείνεται η συνεργασία των παιδιών ανά δύο ή στην ευρύτερη ομάδα. Είναι πιθανόν τα παιδιά να είναι σε θέση από την αρχή να βάλουν κάποια κριτήρια για την επιλογή της ομάδας των κομματιών. Για παράδειγμα, μπορεί να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά του κάθε κομματιού και να 'δουν' ότι στη δεύτερη ομάδα το δεύτερο κομμάτι δεν μπορεί να τοποθετηθεί σε κάποια θέση και να αφήσει χώρο για τα άλλα διαθέσιμα κομμάτια. Ως εκ τούτου αυτή η ομάδα φαίνεται πως δεν ταιριάζει και προσπαθούν με την πρώτη ομάδα. Ωστόσο, εάν δεν λάβουν κάποια κριτήρια υπόψιν και ξεκινήσουν με νοερή δοκιμή και πλάνη, ίσως να χρειαστούν το χωρισμό του σχεδίου σε τετράγωνα (όπως και στο προηγούμενο φύλλο εργασίας).

Στη **σελίδα 19** το παιδί καλείται να επιλέξει 5 κομμάτια πεντόμινο και να καλύψει την επιφάνεια του σχεδίου που παριστάνει ένα σκύλο. Υπάρχουν περισσότερες από μία δυνατότητες κάλυψης του σχεδίου που καλείται να βρει το παιδί και στη **σελίδα 20** μπορεί να σχεδιάσει και μια δεύτερη λύση. Και στο σχέδιο αυτό υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί για το ποια κομμάτια μπορεί να χρησιμοποιηθούν. Για παράδειγμα, το κεφάλι και ο λαιμός του σκύλου ολοκληρώνεται με 10 τετράγωνα, άρα δύο κομμάτια πεντόμινο θα χρειαστούν γι' αυτό το μέρος του σχεδίου και μάλιστα τα κομμάτια αυτά δεν μπορούν να έχουν πάνω από τρία τετράγωνα στη σειρά καθώς οι διαστάσεις του κεφαλιού είναι περίπου  $3 \times 3$ .

Στη **σελίδα 21** υπάρχει μια δραστηριότητα ανάλογη με εκείνη της σελίδας 13. Το παιδί καλείται να επιλέξει 6 κομμάτια πεντόμινο και να καλύψει την επιφάνεια του σχεδίου που παριστάνει μια πεταλούδα. Η διαφοροποίηση ως προς την προηγούμενη δραστηριότητα δεν είναι μόνο ως προς το θέμα αλλά και ως προς την τοποθέτησή του σχεδίου στο φύλλο εργασίας. Ο σκύλος έχει μια θέση τέτοια που να διευκολύνει τη επιλογή των κομματιών, ενώ η πεταλούδα δεν την έχει. Το παιδί χρειάζεται πιθανόν να περιστρέψει την πεταλούδα ώστε να έρθει σε θέση που να μπο-

ρεί να αναγνωρίσει κομμάτια πεντόμινο. Επιπλέον ο διαχωρισμός των μερών της πεταλούδας, κορμός και φτερά, με γραμμές που δεν έχουν σχέση με τα τετράγωνα των κομματιών πεντόμινο πιθανόν να δημιουργεί μια πρόσθετη δυσκολία στο παιδί. Ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τα παιδιά να συνεργαστούν για να βρουν λύση. Μπορεί να προτείνει στα παιδιά να χωρίσουν το σχέδιο σε τετράγωνα εάν δεν το προτείνουν τα παιδιά και εάν κρίνει ότι αυτή η στρατηγική διευκολύνει την επίλυση του προβλήματος. Στην επόμενη σελίδα το παιδί καλείται να μεταφέρει μια άλλη λύση που θα έχει βρει τοποθετώντας τα κομμάτια πεντόμινο στο σχέδιο της πεταλούδας και κάνοντας τα περιγράμματά τους πάνω στον καμβά.

Στη **σελίδα 23** ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αναπαριστά έναν τοίχο με 4 σειρές και 5 στήλες τετραγώνων. Το παιδί καλείται να επιλέξει 4 κομμάτια πεντόμινο (πλακάκια) και να καλύψει την επιφάνεια του τοίχου. Εδώ το παιδί θα πρέπει να αναγνωρίσει ότι του ζητείται για πρώτη φορά να καλύψει ένα κανονικό γεωμετρικό σχήμα με κομμάτια πεντόμινο. Υπάρχουν αρκετές λύσεις και το παιδί θα πρέπει να βρει μία για το σχέδιο του τοίχου και άλλες τέσσερις για τα πινακίδια 4Χ5 που βρίσκονται στο κάτω μέρος του φύλλου εργασίας. Η συνεργασία μεταξύ των παιδιών θα δώσει την ποικιλία των λύσεων.

Στη **σελίδα 24** δίνεται μια παραλλαγή των πεντόμινο, τα τετρόμινο, που προκύπτουν από διαφορετικούς συνδυασμούς τεσσάρων ίσων τετραγωνικών κομματιών. Με τα τετρόμινο δίνεται η ευκαιρία στο παιδί να ξεπεράσει στερεοτυπικές αντιλήψεις και να κατανοήσει ότι πέρα από τα πεντόμινο μπορεί να υπάρξουν και άλλοι συνδυασμοί διαφορετικών αριθμών ίσων τετραγώνων. Το παιδί καλείται να δημιουργήσει τα κομμάτια του τετρόμινο τοποθετώντας τέσσερα ίσα τετράγωνα σύμφωνα με τον αποδεκτό τρόπο που παρουσιάζεται στην αρχή του φύλλου εργασίας. Αυτό που πρέπει να κατανοήσει το παιδί μέσα από τα παραδείγματα αυτά είναι ότι τα τετράγωνα τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο έτσι ώστε δύο πλευρές να ταυτίζονται. Τα κομμάτια που μπορούν να προκύψουν είναι τέσσερα. Πιθανόν να χρειαστεί διαπραγμάτευση στην τάξη εάν υπάρχουν παιδιά που ισχυρίζονται ότι έχουν βρει περισσότερα κομμάτια. Με άλλα λόγια, τα παιδιά πρέπει να συζητήσουν πότε δύο επίπεδα γεωμετρικά σχήματα είναι ίσα και επομένως δεν αποτελούν διαφορετική λύση-κομμάτι. Η συζήτηση θα στηριχθεί στους μετασχηματισμούς στο επίπεδο. Δηλαδή στο γεγονός ότι δύο επίπεδα γεωμετρικά σχήματα είναι ίσα αν το ένα σχήμα με τη βοήθεια των μετασχηματισμών της μετατόπισης, της περιστροφής και της ανάκλασης μπορεί να ταυτιστεί με το άλλο σχήμα. Όταν αποφασιστούν τα κομμάτια, τα παιδιά τα σχεδιάζουν και τα χρωματίζουν στη **σελίδα 25**.

Στη **σελίδα 26** είναι σχεδιασμένο ένα τετράγωνο 6 x 6 για να χρησιμοποιηθεί ως παιχνίδι με τα πεντόμινο. Οι οδηγίες του παιχνιδιού βρίσκονται στο φύλλο εργασίας. Οι δύο παίκτες τοποθετούν εναλλάξ κομμάτια πεντόμινο χωρίς επικαλύψεις πάνω στο τετράγωνο μέχρι να το καλύψουν και ο τελευταίος που τοποθετεί είναι ο νικητής. Βέβαια επειδή το τετράγωνο έχει 36 τετράγωνα δεν είναι δυνατόν να καλυφθεί πλήρως. Κενά ακόμη μπορεί να δημιουργηθούν από την επιλογή των κομματιών και από τον τρόπο που θα τοποθετηθούν τα κομμάτια. Ωστόσο εάν επιλεγούν τα κατάλληλα κομμάτια και τοποθετηθούν και κατάλληλα κερδίζει αυτός που αρχίζει πρώτος το παιχνίδι. Το παιδί καλείται να βρει μια στρατηγική που θα τον βοηθούσε να κερδίζει. Θα ήταν πρόκληση να προσπαθεί να βρίσκει και στρατηγικές κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού για να εμποδίσει ενδεχόμενη νομοτελειακή νίκη του αντίπαλου παίκτη.



## Δραστηριότητες με το Τάνγκραμ (μέρος Α)

Τι είναι το Τάνγκραμ, πού και πώς χρησιμοποιείται έχει ήδη αναφερθεί στις δραστηριότητες του Επιπέδου 1. Στο επίπεδο 2 υπάρχουν 15 φύλλα εργασίας στα οποία το Τάνγκραμ χρησιμοποιείται για τη διαπραγμάτευση εννοιών, όπως η διατήρηση και κάλυψη επιφάνειας, η σύγκριση και η μέτρηση επιφανειών. Σε κάποιες δραστηριότητες θα χρειαστεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σετ Τάνγκραμ διαθέσιμα για το κάθε παιδί. Τα παιδιά μπορούν να εργάζονται ανά δύο ή σε ομάδες και να ανταλλάσσουν ιδέες και κομμάτια. Στην περιγραφή των δραστηριοτήτων παρακάτω χρησιμοποιείται η έκφραση “το παιδί...” για οικονομία λόγου ασχέτως του αν τα παιδιά εργάζονται σε ομάδα ή όχι.

Η **σελίδα 27** είναι μια σελίδα εξοικείωσης με το υλικό. Το παιδί έχει το Τάνγκραμ του και συγκρίνει τα 7 κομμάτια του με αυτά που είναι σχεδιασμένα στο φύλλο εργασίας. Καλείται να αναγνωρίσει τα σχήματα και να απαντήσει ότι τα τρίγωνα είναι 4 και τα τετράπλευρα 2. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να παροτρύνει τα παιδιά να διακρίνουν τα τετράπλευρα σε τετράγωνο και πλάγιο παραλληλόγραμμο αναφερόμενοι σε χαρακτηριστικές ιδιότητες των συγκεκριμένων σχημάτων και συγκρίνοντάς τες.

Στη **σελίδα 28** το παιδί καλείται να συγκρίνει τα τρία διαφορετικά τριγωνικά κομμάτια του Τάνγκραμ μεταξύ τους. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι όροι ‘σχήμα’ και ‘μέγεθος σχήματος’ χρησιμοποιούνται για να γίνει η σύγκριση ανάμεσα στα τρία σχήματα και να εξαχθούν οι σχέσεις τους με βάση το μέγεθός τους. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να καλέσει τα παιδιά να εξετάσουν τα τρίγωνα και να κάνουν μια πρώτη εκτίμηση με το μάτι για τις σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν ανάμεσα στα τρία τρίγωνα. Σε μια μεριά του πίνακα μπορεί να γραφούν οι ιδέες των παιδιών. Κατόπιν ο εκπαιδευτικός καλεί τα παιδιά να παρατηρήσουν επιμέρους χαρακτηριστικά των τριών τριγώνων πριν απαντήσουν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. Για παράδειγμα, τα παιδιά με διάφορους τρόπους (μέτρηση με χάρακα ή τετραγωνάκια, δίπλωση, κ.ο.κ.) μπορούν να διαπιστώσουν ότι τα τρία τρίγωνα είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Πιθανόν να μετρήσουν με τους χάρακές τους και να βρουν ότι η κάθετη πλευρά του τριγώνου 3 είναι ίση με την υποτείνουσα (μη κάθετη πλευρά) του τριγώνου 2 και η κάθετη πλευρά του τριγώνου 2 είναι ίση με την υποτείνουσα του τριγώνου 1. Με δοκιμή και πλάνη τοποθετώντας δύο τρίγωνα 1 καλύπτουν το τρίγωνο 2, τοποθετώντας 2 τρίγωνα 2 καλύπτουν το τρίγωνο 3, κ.ο.κ. ανακαλύπτουν και τις σχέσεις ανάμεσα στις επιφάνειες των τριών τριγώνων.

Στις παρακάτω δραστηριότητες θα χρειαστεί να γίνουν συγκρίσεις και ανάμεσα στα υπόλοιπα κομμάτια του Τάνγκραμ και το τρίγωνο 1, όπως για παράδειγμα ότι το παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο καλύπτονται επίσης από δύο τρίγωνα 1 το καθένα. Αυτές οι ανακαλύψεις και αρκετές άλλες, όπως για παράδειγμα ότι όλα τα σχήματα του Τάνγκραμ μπορεί να καλυφθούν

από το τρίγωνο 1 που χρησιμεύει και ως μονάδα μέτρησης κ.λπ., μπορεί να είναι αντικείμενο μιας ξεχωριστά οργανωμένης διδασκαλίας ή να λαμβάνουν χώρα περιστασιακά, όποτε προκύπτουν στις διάφορες δραστηριότητες.

Η δραστηριότητα της **σελίδας 29** στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην καλή δουλειά των παιδιών στην προηγούμενη δραστηριότητα. Το παιδί καλείται να συγκρίνει τις επιφάνειες δύο σχημάτων, ενός τετραγώνου (B) και ενός μη κανονικού οκταπλεύρου (A) με το μάτι και να αποφανθεί ποιο από τα δύο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Κατόπιν χρησιμοποιεί τα κομμάτια Τάνγκραμ για να επιβεβαιώσει την αρχική του εκτίμηση. Είναι πιθανόν το παιδί να 'δεί' ότι το B έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το A και να μπορεί να δώσει διάφορες εξηγήσεις για τη σκέψη του αυτή, όπως για παράδειγμα ότι το B φαίνεται να καταλαμβάνει περισσότερο χώρο στο φύλλο εργασίας. Αν έχει 'δεί' το αντίθετο, είναι πιθανόν να δώσει εξηγήσεις που να υπονοούν ότι το A είναι πιο συμπαγές από το B, κ.λπ. Για την ταυτόχρονη κάλυψη και των δύο σχημάτων θα χρειαστούν περισσότερα από ένα σετ Τάνγκραμ. Επιπλέον το παιδί μπορεί να σχεδιάζει τα κομμάτια πάνω στα A και B και να τα ονομάζει. Θα διαπιστώσει ότι για το A χρειάζονται δύο τρίγωνα 3 ή τέσσερα τρίγωνα 2 ή 8 τρίγωνα 1, ενώ για το B χρειάζονται 1 τρίγωνο 3, 3 τρίγωνα 1 και 1 παραλληλόγραμμο, δηλαδή  $4 + 3 + 2 = 9$  τρίγωνα 1. Με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιεί μια κοινή μονάδα μέτρησης της επιφάνειας των A και B και το συμπέρασμα ότι το B έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το A είναι έγκυρο.

Στη **σελίδα 30** το παιδί καλείται να συγκρίνει τα εμβαδά δύο σχημάτων, ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (A) και ενός τετραγώνου (B) με το μάτι και να αποφανθεί ποιο είναι μεγαλύτερο. Κατόπιν, καλύπτοντας τα A και B με κομμάτια του Τάνγκραμ διαπιστώνει εάν μάντεψε σωστά ή όχι. Το παιδί θα πρέπει να δώσει την αιτιολόγησή του είτε απαντήσει ότι το A ή το B έχει μεγαλύτερο εμβαδόν είτε ότι είναι ισεμβαδικά. Στην περίπτωση που 'βλέπει' ότι το A έχει μεγαλύτερο εμβαδόν μπορεί να έχει επηρεαστεί από τη θέση του A στο φύλλο εργασίας σε σχέση με το B -φαίνεται πιο μακρύ, πιο ψηλό-, στην αντίθετη περίπτωση μπορεί επειδή το B φαίνεται πιο συμπαγές, πιο μεγάλο σχήμα. Στην περίπτωση που 'έχει δει' ότι τα δύο εμβαδά είναι ίσα μπορεί να έχει χωρίσει το A νοερά σε δύο ίσα μέρη, να τα έχει περιστρέψει για να γίνουν οριζόντια και το ένα πάνω από το άλλο να δίνουν το B, ή αντίθετα να έχει χωρίσει νοερά το B σε δύο ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, να τα έχει περιστρέψει και ενώσει για να φτιάξει το A. Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται να έχει κάνει κάποιους μετασχηματισμούς για να οδηγηθεί στο σωστό συμπέρασμα, το οποίο επιβεβαιώνει κατόπιν με 4 τετράγωνα κομμάτια ή 8 τρίγωνα 1. Υπάρχει περίπτωση κάποιο παιδί να θέσει το θέμα του τύπου -μήκος επί πλάτος- το οποίο πιθανόν να έχει γνωρίσει στην πρωινή τάξη. Ο εκπαιδευτικός αποδέχεται λύσεις αυτού του τύπου και παρωθεί τα παιδιά να κάνουν τις απαραίτητες συσχετίσεις και με το υλικό.

Στη **σελίδα 31** το παιδί καλείται να καλύψει με τα 7 κομμάτια του Τάνγκραμ το σχήμα που δίδεται στο φύλλο εργασίας. Το παιδί μπορεί να αναπτύξει κάποια στρατηγική. Για παράδειγμα, τα κομμάτια που καλύπτουν συγκεκριμένα μέρη του σχήματος είναι άμεσα αναγνωρίσιμα (τετράγωνο, τρίγωνο 1, τρίγωνο 2) και χρησιμοποιώντας τα θα πρέπει να συνδυάσει τα υπόλοιπα 4 για το κύριο μέρος του σχήματος με δοκιμή και πλάνη.

Στη **σελίδα 32** το παιδί καλείται να καλύψει με τα 7 κομμάτια του Τάνγκραμ το σχήμα που δίδεται στο φύλλο εργασίας και παριστάνει ένα καράβι. Και πάλι το παιδί μπορεί να αναπτύξει κάποια στρατηγική. Για παράδειγμα, στο 'πανί' του καραβιού μπορεί να τοποθετήσει ένα από τα δύο τρίγωνα 3. Για το 'κατάρτι' μπορεί να σκεφτεί να χρησιμοποιήσει άμεσα το τρίγωνο 2 και

το άλλο τρίγωνο 3, κ.ο.κ. Σε κάθε περίπτωση εφαρμόζει δοκιμή και πλάνη για την επιλογή των κομματιών.

Στη **σελίδα 33** δίνονται δύο μη κυρτά σχήματα A και B που είναι μη κανονικά εξάγωνα και ζητείται από το παιδί να συγκρίνει τα εμβαδά τους με το μάτι και να βρει ποιο είναι μεγαλύτερο. Κατόπιν θα πρέπει να επιβεβαιώσει την άποψή του χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης των εμβαδών των σχημάτων το μικρό τρίγωνο Τάνγκραμ, το τρίγωνο 1. Το παιδί μπορεί να μαντέψει αναπτύσσοντας κάποια στρατηγική που να στηρίζεται σε νοερό μετασχηματισμό, όπως για παράδειγμα ότι 'κόβοντας' νοερά το πάνω τριγωνικό μέρος του σχήματος B και τοποθετώντας το στο τριγωνικό κενό του ίδιου σχήματος σχηματίζεται ένα τετράγωνο που ήδη έχουμε δει ότι έχει εμβαδόν 8 μικρά τρίγωνα. Και με μόνη αυτή τη σκέψη μπορεί να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι το A έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το B. Μια άλλη στρατηγική μπορεί να περιλαμβάνει νοερό μετασχηματισμό του σχήματος A, όπου 'κόβονται' δύο τριγωνικά κομμάτια στο πάνω μέρος δεξιά και αριστερά τα οποία 'προστίθενται' νοερά στο κάτω δεξιά μέρος του σχήματος κι έτσι προκύπτει ένα σχήμα παρόμοιο με το B ως προς το πάνω μέρος αλλά μεγαλύτερο κατά δύο μικρά τρίγωνα, αυτά δηλαδή που καλύπτουν το τριγωνικό κενό στο κάτω μέρος. Με τη μέτρηση τα παιδιά ανακαλύπτουν ότι το εμβαδόν του A είναι 10 τρίγωνα 1 ενώ το εμβαδόν του B είναι 8 τρίγωνα 1.

Στη **σελίδα 34** δίνεται ένα τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές που ισοδυναμεί με τα δύο τρίγωνα 3 του Τάνγκραμ. Το παιδί καλείται να ανακαλύψει και να καλύψει με δύο κομμάτια, με τέσσερα και με πέντε το συγκεκριμένο τρίγωνο και κατόπιν να σχεδιάσει τις τρεις λύσεις στη επόμενη σελίδα. Για την πρώτη περίπτωση θα πρέπει να δει ότι τα δύο μεγάλα τρίγωνα 3 του Τάνγκραμ καλύπτουν ακριβώς την επιφάνεια του τριγώνου. Για τη δεύτερη περίπτωση (τέσσερα κομμάτια) μπορεί να σκεφτεί να κρατήσει το ένα τρίγωνο και να αντικαταστήσει το άλλο με τρία σχήματα γνωρίζοντας από προηγούμενες δραστηριότητες ότι το τρίγωνο 3 ισοδυναμεί με 4 μικρά τρίγωνα 1, πιθανόν να σκεφτεί να χρησιμοποιήσει 2 μικρά τρίγωνα 1 και το πλάγιο παραλληλόγραμμο ή 2 μικρά τρίγωνα 1 και το τετράγωνο τοποθετημένα σε διαφορετικές θέσεις από τον προηγούμενο συνδυασμό ή 2 μικρά τρίγωνα 1 και το μεσαίο τρίγωνο 2 πάλι τοποθετημένα σε διαφορετικές θέσεις ή 4 μεσαία τρίγωνα 2 χρησιμοποιώντας κομμάτια από δύο σετ Τάνγκραμ. Η τρίτη περίπτωση επιδέχεται μια σειρά συνδυασμών-λύσεων αλλά θα χρειαστούν κομμάτια από δύο σετ Τάνγκραμ. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν 2 μικρά τρίγωνα 1, το τετράγωνο και 2 μεσαία τρίγωνα 2, 2 μικρά τρίγωνα 1, το πλάγιο παραλληλόγραμμο και 2 μεσαία τρίγωνα 2, 4 μικρά τρίγωνα 1 και 1 μεσαίο τρίγωνο 2, κ.ο.κ. Τα παιδιά συζητούν σε ομάδες τις λύσεις τους και ανταλλάσσουν ιδέες για δυνατές και αδύνατες λύσεις. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επεκτείνει τη δραστηριότητα ζητώντας κάλυψη της επιφάνειας με περισσότερα κομμάτια ή να τροποποιήσει τη δραστηριότητα βάζοντας περιορισμό στη χρήση συγκεκριμένων κομματιών και αιτιολόγηση για την επιφάνεια που μπορεί να καλύπτουν.

Στη **σελίδα 36** το παιδί διαβάσει στο πάνω μέρος της σελίδας τον ορισμό του τετραγώνου που είναι 'απλωμένος' σε τρία διαφορετικά τετράγωνα. Στη δραστηριότητα που ακολουθεί ζητείται από το παιδί να καλύψει ένα τετράγωνο με δύο, τέσσερα και πέντε κομμάτια Τάνγκραμ και τις λύσεις να τις σχεδιάσει στην επόμενη σελίδα. Η δραστηριότητα αυτή θα μπορούσε να συνδεθεί με την προηγούμενη μέσα από το μετασχηματισμό του τριγώνου της σελίδας 34 σε τετράγωνο. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αποφασίσει εάν ο μετασχηματισμός θα προηγηθεί του φύλλου εργασίας ή θα ακολουθήσει τη δραστηριότητα με το τετράγωνο ώστε με τον ένα ή τον άλλο τρόπο να

γίνουν οι απαραίτητες συνδέσεις. Τα δύο κομμάτια που χρειάζονται για την κάλυψη του τετραγώνου είναι τα δύο μεγάλα τρίγωνα 3 που χρησιμοποιήθηκαν για τον ίδιο λόγο στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Τα τέσσερα κομμάτια μπορεί να είναι 4 μεσαία τρίγωνα 2 χρησιμοποιώντας κομμάτια από δύο σετ Τάνγκραμ, κ.ο.κ. Τα πέντε κομμάτια μπορεί να είναι 3 μεσαία τρίγωνα 2 και 2 μικρά τρίγωνα 1 χρησιμοποιώντας κομμάτια από δύο σετ Τάνγκραμ ή 2 τετράγωνα, 2 μικρά τρίγωνα 1 και ένα μεσαίο τρίγωνο 2, κ.ο.κ.

Στη **σελίδα 38** το παιδί καλείται να καλύψει την επιφάνεια δύο ορθογώνιων παραλληλογράμμων που το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο με κομμάτια του Τάνγκραμ. Κατόπιν να σχεδιάσει τις λύσεις που βρίσκει στην επόμενη σελίδα. Το πρώτο ορθογώνιο είναι το μισό τετράγωνο της σελίδας 36. Εάν αυτό γίνει αντιληπτό από τα παιδιά από την αρχή, μπορεί ο εκπαιδευτικός να τους ζητήσει να υπολογίσουν πόσα και ποια κομμάτια Τάνγκραμ θα χρειαστούν για την κάλυψη εκμεταλλευόμενοι την εμπειρία τους από την προηγούμενη δραστηριότητα. Εδώ οι επιλογές είναι περιορισμένες και η κάλυψη μπορεί να γίνει με 2, 3 ή 4 κομμάτια, δηλαδή 2 τετράγωνα από δύο σετ Τάνγκραμ, 2 μικρά τρίγωνα 1 και το τετράγωνο, 4 μικρά τρίγωνα 1 από δύο σετ Τάνγκραμ. Το μεγαλύτερο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι μεγαλύτερο από το πρώτο κατά ένα τετράγωνο. Αυτό το επιπλέον μέρος μπορεί να καλυφθεί με 2 τρόπους, είτε με 2 μικρά τρίγωνα 1 είτε με το τετράγωνο. Άρα οι δυνατοί συνδυασμοί μπορεί να είναι 3 τετράγωνα από τρία σετ Τάνγκραμ, 6 μικρά τρίγωνα από τρία σετ Τάνγκραμ, 2 τετράγωνα από δύο σετ Τάνγκραμ και 2 μικρά τρίγωνα 1, 1 τετράγωνο και 4 μικρά τρίγωνα 1 από δύο σετ Τάνγκραμ.

Στις δύο τελευταίες λύσεις τα κομμάτια μπορούν να τοποθετηθούν με διαφορετικούς τρόπους. Αυτό το γεγονός αυξάνει τον αριθμό των λύσεων, εάν θεωρήσουμε ότι εκτός από το είδος των κομματιών μας ενδιαφέρει και η σειρά με την οποία τα τοποθετούμε.

Στη **σελίδα 40** το παιδί καλείται να ασχοληθεί με το παραλληλόγραμμο ως σχήμα-κομμάτι του Τάνγκραμ και την επιφάνειά του. Επισημαίνεται το κύριο χαρακτηριστικό του παραλληλογράμμου με σχηματική αναπαράσταση, δηλαδή ότι οι απέναντι πλευρές του ανήκουν σε παράλληλες γραμμές (ευθείες). Η παραλληλία των ευθειών προσεγγίζεται διαισθητικά αλλά μπορεί ο εκπαιδευτικός να δώσει κάποιο προσδιορισμό του είδους "η απόσταση ανάμεσα στις ευθείες παραμένει σταθερή" κ.ο.κ., εφόσον είναι προετοιμασμένος να αντιμετωπίσει με παραδείγματα τι σημαίνει "απόσταση μεταξύ δύο ευθειών" που ούτως ή άλλως διδάσκεται στο αναλυτικό πρόγραμμα της πρωινής ζώνης.

Κατόπιν ζητείται από το παιδί να καλύψει ένα μεγαλύτερο παραλληλόγραμμο από αυτό του Τάνγκραμ με τρία κομμάτια του Τάνγκραμ και μάλιστα με τρεις διαφορετικούς τρόπους που θα τους σχεδιάσει στα τρία παραλληλόγραμμο της επόμενης σελίδας. Ένας τρόπος μπορεί να είναι το παραλληλόγραμμο κομμάτι και 2 μικρά τρίγωνα 1, ένας άλλος τρόπος μπορεί να είναι το μεσαίο τρίγωνο 2 και 2 μικρά τρίγωνα 1, ένας τρίτος με 4 μικρά τρίγωνα 1, ενώ ένας τέταρτος τρόπος μπορεί να περιλαμβάνει το τετράγωνο και 2 μικρά τρίγωνα 1. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει στα παιδιά την ευκαιρία να συνδέσουν τη δραστηριότητα στις σελίδες 38 και 39 με τη δραστηριότητα στις σελίδες 40 και 41. Τα παιδιά διαπιστώνουν ότι το μικρότερο ορθογώνιο και το παραλληλόγραμμο είναι ισεμβαδικά. Μπορεί να βρουν και τρόπους να μεταμορφώσουν το ένα σχήμα στο άλλο.





## Δραστηριότητες με το γεωπίνακα (μέρος Β)

Για το γεωπίνακα και τη χρήση του υπάρχει σχετική αναφορά και στις δραστηριότητες του Επιπέδου 1. Στα επόμενα φύλλα εργασίας ο γεωπίνακας χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος μέσα από τα εμβαδά ίσων σχημάτων που τα δημιουργεί το παιδί στο γεωπίνακα.

Στη **σελίδα 42** το παιδί καλείται να μοιράσει το γεωπίνακα σε δύο ίσα μέρη με διαφορετικούς τρόπους και κατόπιν να αποτυπώσει αυτούς τους τρόπους στους σχεδιασμένους γεωπίνακες στο φύλλο εργασίας. Εδώ με τον όρο 'μέρος' υπονοείται η επιφάνεια. Επειδή οι γεωπίνακες στο φύλλο εργασίας είναι τέσσερις, μπορεί ο εκπαιδευτικός να δώσει φωτοτυπίες με γεωπίνακες σε παιδιά που βρήκαν περισσότερες από τέσσερις λύσεις. Οι πιο πιθανές λύσεις είναι ο οριζόντιος χωρισμός, ο κάθετος και ο διαγώνιος (δεξιός και αριστερός). Αυτές οι λύσεις συνδέονται και με την έννοια της συμμετρίας αλλά και του κλάσματος  $\frac{1}{2}$ . Ο εκπαιδευτικός είναι εκείνος που θα αποφασίσει εάν θα εκμεταλλευτεί την ευκαιρία να θίξει και αυτές τις έννοιες και τι έκταση θα δώσει στη διαπραγμάτευσή τους. Άλλες λύσεις μπορεί να περιλαμβάνουν τεθλασμένες γραμμές κ.λπ. Τα παιδιά ενθαρρύνονται να αιτιολογήσουν τις λύσεις τους είτε μετρώντας, είτε δείχνοντας, είτε αναγνωρίζοντας το ρόλο της διαίσθησης ή της ενόρασης.

Στη **σελίδα 43** το παιδί καλείται να ακολουθήσει την ίδια διαδικασία, όπως και στην προηγούμενη σελίδα, αλλά αυτή τη φορά πρέπει να βρει διαφορετικούς τρόπους για να χωρίσει τον γεωπίνακα σε τέσσερα ίσα μέρη. Κατόπιν μεταφέρει τις λύσεις στους σχεδιασμένους γεωπίνακες στο φύλλο εργασίας. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρειαστεί να δώσει φωτοτυπίες με γεωπίνακες για περισσότερες από τέσσερις λύσεις. Συνήθεις λύσεις είναι ο σταυρός (+), οι δύο διαγώνιοι (x), οι τρεις οριζόντιες και οι τρεις κάθετες γραμμές, ενώ άλλες λύσεις μπορεί να περιλαμβάνουν και τεθλασμένες γραμμές. Τα παιδιά ενθαρρύνονται να αιτιολογήσουν τις λύσεις τους και να τις συγκρίνουν με αυτές του προηγούμενου φύλλου εργασίας. Όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός αποφασίζει εάν θα συνδέσει τις λύσεις των παιδιών με την έννοια του κλάσματος  $\frac{1}{4}$  και πώς θα το χειριστεί.

Στο φύλλο εργασίας της **σελίδας 44** ο σχεδιασμένος γεωπίνακας περιλαμβάνει ένα τετράγωνο που παριστάνει το ένα τέταρτο του πατώματος μιας αποθήκης. Το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει το γεωπίνακα και να κατασκευάσει όλο το πάτωμα με τα λαστιχάκια του. Κατόπιν θα μεταφέρει τη λύση στο φύλλο εργασίας σχεδιάζοντας όλο το πάτωμα. Όσο δύσκολο είναι να προσδιοριστεί το μέρος από το όλο, δηλαδή να δημιουργηθεί ένα κλάσμα, άλλο τόσο είναι να δημιουργηθεί το όλο από το μέρος, όπως ζητείται στην προκειμένη περίπτωση. Ο εκπαιδευτικός βοηθά τα παιδιά να αποκωδικοποιήσουν την εκφώνηση της άσκησης ξεκινώντας από το τι σημαίνει  $\frac{1}{4}$  μιας ποσότητας. Αν χρειαστεί καταφεύγει σε απλούστερα παραδείγματα ή στην αντί-

στροφή διαδικασία. Για παράδειγμα, μπορεί να ορίσει ο εκπαιδευτικός ότι το τετράγωνο αυτό ή κάποιο άλλο είναι το μισό μιας σοκολάτας και ο εκπαιδευτικός να ζητά ολόκληρη τη σοκολάτα. Όταν το παιδί συλλάβει την ιδέα ότι χρειάζονται 4 τέτοια τέταρτα, δηλαδή τέσσερα τέτοια τετράγωνα για να γίνει μια ολόκληρη ποσότητα που είναι το πάτωμα της αποθήκης, θα μπορέσει να ολοκληρώσει την κατασκευή του στο γεωπίνακα. Είναι πιθανόν να χρειαστεί ο εκπαιδευτικός να δείξει το πάτωμα της αίθουσας ή να αναφερθεί σε σχετικές εμπειρίες των παιδιών. Το σχήμα του πατώματος, βέβαια, μπορεί να είναι τετράγωνο, ορθογώνιο ή κάποιο άλλο μη συνηθισμένο γεωμετρικό σχήμα. Όταν καταλήξει στο σχήμα του πατώματος το παιδί θα είναι σε θέση να απαντήσει και στο ερώτημα που τίθεται στο τέλος της άσκησης “τι μέρος του πατώματος έλειπε στην αρχή”. Την απάντηση πρέπει να την γράψει με λέξεις και με σύμβολο ( $\frac{3}{4}$ ).

Στη **σελίδα 45** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει το γεωπίνακα και τα λαστιχάκια του και να κατασκευάσει ένα καράβι ίδιο με το σχεδιασμένο. Το καράβι έχει τρία βασικά μέρη-σχήματα: την καρίνα που είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο, τις καμπίνες που είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τη γέφυρα που είναι ένα τετράγωνο. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να αναγνωρίσουν τα σχήματα που αντιστοιχούν στα τρία μέρη του καραβιού και να τα ονομάσουν και κατόπιν να τα συσχετίσουν. Θα πρέπει τα παιδιά να είναι σε θέση να διακρίνουν ότι οι καμπίνες ισοδυναμούν με δύο γέφυρες, ότι η καρίνα ισοδυναμεί με τρεις γέφυρες και να μπορούν να αποδείξουν τους ισχυρισμούς τους με διάφορους τρόπους. Δηλαδή, θα πρέπει να μπορούν να αποδείξουν ότι η καρίνα χωρίζεται σε δύο ίσα τετράγωνα και δύο ίσα τρίγωνα τα οποία τρίγωνα ενωνόμενα αποτελούν ένα τετράγωνο ίδιο με τα άλλα. Αυτή η εργασία θα τους βοηθήσει να φτιάξουν μία λίστα από τα μέρη του καραβιού και των τετραγώνων από τα οποία αποτελούνται. Αυτά αθροιζόμενα κάνουν τα τετράγωνα του καραβιού που είναι 6. Έτσι θα είναι πιο εύκολο να απαντήσουν στις ερωτήσεις που βρίσκονται κάτω από το γεωπίνακα αφού κάνουν τους σχετικούς υπολογισμούς. Η πρώτη ερώτηση ζητά από το παιδί να εκφράσει με λέξεις και σύμβολα (κλάσματα) τι μέρος του καραβιού είναι: α) η γέφυρα (το παιδί μπορεί να απαντήσει με βάση τη λίστα που έχει φτιάξει ότι η γέφυρα είναι το  $\frac{1}{6}$  του καραβιού), β) οι καμπίνες ( $\frac{2}{6}$ ) και γ) η καρίνα ( $\frac{3}{6}$ ). Εδώ μπορεί να δει ο εκπαιδευτικός την ευκαιρία να μιλήσει για ισοδύναμα κλάσματα οδηγώντας τα παιδιά να αναγνωρίσουν ότι η καρίνα είναι το μισό καράβι και ακόμη παραπέρα ότι οι καμπίνες είναι το ένα τρίτο του, κ.λπ. Μολονότι οι διαιρεμένες περιοχές εξηγούν γιατί υπάρχουν διαφορετικές ονομασίες για το ίδιο κλασματικό μέρος, τα παιδιά μπορεί να οδηγηθούν να καταλάβουν τους συσχετισμούς ανάμεσα στις υποδιαιρέσεις των σχημάτων (το μέρος) και ολόκληρη τη μονάδα (το όλο) και να κάνουν τους ανάλογους νοερούς μετασχηματισμούς. Το ίδιο ισχύει και για την επόμενη ερώτηση.

Η δεύτερη ερώτηση καλεί το παιδί να υποθέσει ότι ο γεωπίνακας είναι ένα πίνακας ζωγραφικής και να προσδιορίσει τι μέρος του είναι το καράβι εκφράζοντας αυτό που θα βρει σε κλάσμα με λέξεις και σύμβολα. Η εργασία αυτή προϋποθέτει ότι το παιδί θα ‘δει’ το γεωπίνακα ως ένα άθροισμα τετραγώνων (16 τετράγωνα) -τα οποία μπορεί να υπολογίσει με πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό- και θα συσχετίσει αυτό το άθροισμα με το άθροισμα των τετραγώνων του καραβιού που έχει ήδη βρει (6 τετράγωνα) στην προηγούμενη ερώτηση. Θα πρέπει λοιπόν να πει ότι το καράβι είναι τα  $\frac{6}{16}$  του πίνακα.



## Δραστηριότητες με τα pattern blocks

Τα pattern blocks είναι πλακίδια με κανονικό σχήμα ('σχήματα' είναι ο όρος που χρησιμοποιείται στα φύλλα εργασίας για τα pattern blocks) με τα οποία καλύπτουμε επιφάνειες χωρίς να αφήνουμε κενά. Οι διαστάσεις των σχημάτων είναι τέτοιες ώστε να μπορούν να αναζητηθούν οι μεταξύ τους σχέσεις (2 τραπέζια, για παράδειγμα, καλύπτουν το εξάγωνο, κ.ο.κ.). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα pattern blocks αποτελούν άτυπες μονάδες μέτρησης της επιφάνειας και χρησιμοποιούνται με το ίδιο σκεπτικό που χρησιμοποιούμε για παράδειγμα μια γόμα ως άτυπη μονάδα μέτρησης της επιφάνειας που καταλαμβάνει το εξώφυλλο ενός βιβλίου. Οι δραστηριότητες που βασίζονται στη χρήση των pattern blocks προσφέρουν ευκαιρίες για καλλιτεχνική δημιουργία και για ανάπτυξη της αντίληψης του χώρου.

Στη **σελίδα 46** τα σχήματα χρησιμοποιούνται για να διερευνηθούν οι ιδέες των παιδιών στα κλάσματα και τη σχέση μέρους-όλου και μέρους-μέρους που αναδεικνύεται μέσα από την κάλυψη. Δίνονται τρεις όμοιοι χαρταετοί και ζητείται από το παιδί να τους καλύψει με τρία διαφορετικά σχήματα, τρεις διαφορετικούς τρόπους. Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει χειραπτικό υλικό ή να σχεδιάσει απευθείας τα σχήματα πάνω στους χαρταετούς. Για κάθε περίπτωση πρέπει να συμπληρωθεί ένα πινακίδιο όπου ζητείται από το παιδί να γράψει τον αριθμό των ίδιων σχημάτων που χρησιμοποιεί κάθε φορά και το μέρος του χαρταετού που αντιστοιχεί σε κάθε σχήμα και λεκτικά και συμβολικά με μορφή κλάσματος. Το παιδί μπορεί να επιλέξει το ισόπλευρο τρίγωνο και να γράψει ότι χρειάστηκε 6 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα για να καλύψει την επιφάνεια του χαρταετού και ότι κάθε τρίγωνο αποτελεί το ένα έκτο ή  $\frac{1}{6}$  του χαρταετού. Κατόπιν θα πρέπει να σχεδιάσει πάνω στο χαρταετό τα τρίγωνα. Το ίδιο μπορεί να κάνει με δύο ίσα ισοσκελή τραπέζια, που το καθένα είναι το  $\frac{1}{2}$  του χαρταετού και με τρεις ίσους ρόμβους που ο καθένας είναι το  $\frac{1}{3}$  του χαρταετού. Τέλος το παιδί καλείται να συγκρίνει τα τρία σχήματα που χρησιμοποίησε για τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις και να βρει ποιο είναι το μεγαλύτερο κομμάτι. Τα παιδιά μπορεί να συζητήσουν την τελευταία ερώτηση καταλήγοντας πιθανόν στο συμπέρασμα πως όσο πιο μεγάλο το σχήμα τόσο λιγότερα κομμάτια χρειάζονται για την κάλυψη της επιφάνειας. Μπορεί ακόμη να παρατηρήσουν και τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα, όπως για παράδειγμα ότι δύο από τα τρίγωνα που χρησιμοποιήθηκαν ισοδυναμούν με έναν ρόμβο και τρία από αυτά τα τρίγωνα ισοδυναμούν με ένα ισοσκελές τραπέζιο.

Στη **σελίδα 47** το παιδί καλείται να καλύψει την επιφάνεια τριών διαφορετικών σχημάτων, ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός μη κυρτού εξαγώνου. Για κάθε περίπτωση το παιδί πρέπει να βρει έως και τρεις διαφορετικούς τρόπους κάλυψης χρησιμοποιώντας τρίγωνα, ρόμβους και τετράγωνα. Κατόπιν θα πρέπει να εκφράσει με κλάσμα τι μέρος του σχήματος είναι το σχήμα που χρησιμοποίησε. Για παράδειγμα το παιδί μπορεί να βρει ότι την επιφάνεια

του τριγώνου μπορεί να την καλύψει με τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, άρα το ένα τρίγωνο είναι το  $\frac{1}{4}$  του σχήματος, δηλαδή του μεγάλου τριγώνου. Το ίδιο σχήμα μπορεί να το καλύψει με ένα ρόμβο και δύο ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, άρα ο ρόμβος είναι το  $\frac{1}{2}$  του σχήματος, δηλαδή του μεγάλου τριγώνου. Σε αυτή την περίπτωση ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από το παιδί να αιτιολογήσει τη σκέψη του. Ένας τρόπος, πιθανόν, είναι να έχει δει το παιδί ότι δύο ίσα ισόπλευρα τρίγωνα μας κάνουν έναν ρόμβο. Άρα τα δύο τρίγωνα που απομένουν στο μεγάλο τρίγωνο μας δίνουν έναν ακόμη ρόμβο από όπου συνάγεται ότι χρειάζονται δύο ρόμβοι να καλύψουν το τρίγωνο επομένως κάθε ρόμβος είναι  $\frac{1}{2}$  του σχήματος. Επιπλέον το τετράγωνο μπορεί να καλυφθεί από τέσσερα ίσα μικρότερα τετράγωνα και επομένως κάθε ένα από αυτά τα τετράγωνα είναι το  $\frac{1}{4}$  του σχήματος δηλαδή του μεγάλου τετραγώνου. Το τελευταίο σχήμα μπορεί να καλυφθεί από τέσσερις ίσους ρόμβους και επομένως κάθε ρόμβος είναι το  $\frac{1}{4}$  του σχήματος. Ακόμη μπορεί να καλυφθεί από 8 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα και επομένως κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα είναι το  $\frac{1}{8}$  του σχήματος. Ωστόσο είναι πιθανόν τα παιδιά να παρατηρήσουν ότι δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα τρία σχήματα (τρίγωνα, ρόμβοι, τετράγωνα) και να το επιβεβαιώσουν με δοκιμή και πλάνη. Για παράδειγμα, στο τελευταίο σχήμα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το τετράγωνο.

Στη **σελίδα 48** το παιδί καλείται να παρατηρήσει ένα ήλιο που το κυρίως σώμα του είναι ένα κανονικό εξάγωνο και οι ακτίνες του ίσα ισόπλευρα τρίγωνα. Το παιδί πρέπει να επιλέξει τα κατάλληλα σχήματα με τα οποία θα καλύψει τον ήλιο και τις ακτίνες του. Μπορεί να επιλέξει ένα κανονικό εξάγωνο και 6 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, μπορεί όμως και να επιλέξει 12 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα από τα οποία τα 6 θα χρησιμοποιήσει για να καλύψει το κυρίως σώμα του ήλιου. Κατόπιν το παιδί πρέπει να βρει τι μέρος του ήλιου είναι οι ακτίνες του όλες μαζί και να το εκφράσει με κλάσμα. Είναι δυνατόν να μαζέψει το παιδί όλες τις ακτίνες-σχήματα, να σχηματίσει ένα δεύτερο κανονικό εξάγωνο και να συμπεράνει ότι οι ακτίνες είναι το  $\frac{1}{2}$  του ήλιου αφού δύο εξάγωνα είναι όλος ο ήλιος. Μπορεί σε αυτή τη σκέψη να οδηγηθεί και νοερά χωρίς να χρησιμοποιήσει υλικό.

Στη **σελίδα 49** υπάρχουν δύο ίδια διακοσμητικά πλέγματα που το καθένα αποτελείται από 10 ίδιους ρόμβους. Τα πλέγματα αυτά μπορούν να θεωρηθούν ως σχήματα με επιφάνεια ή ως απλά περιγράμματα. Τα παιδιά μπορούν να εργαστούν σε ομάδες ή ανά δύο, να συζητήσουν και να αποφασίσουν τι θέλουν να κάνουν. Η συνεργασία θα τους βοηθήσει και στη δεύτερη άσκηση που είναι περισσότερο απαιτητική. Στην πρώτη άσκηση το παιδί καλείται να χρωματίσει το  $\frac{1}{2}$  του πλέγματος και στη δεύτερη τα  $\frac{3}{4}$ . Εάν το παιδί 'βλέπει' το πλέγμα ως επαναλαμβανόμενες επιφάνειες, μπορεί να χρωματίσει το εσωτερικό των ρόμβων. Εάν 'βλέπει' περιγράμματα, μπορεί να χρωματίσει τις περιμέτρους των ρόμβων. Στην πρώτη άσκηση υπάρχει περίπτωση να μην χρωματίσει συνεχόμενους ρόμβους ή τους 5 πρώτους αλλά σκόρπιους ή εναλλάξ ή τους 5 τελευταίους.

Στη δεύτερη άσκηση, εάν το παιδί οδηγηθεί να 'δει' ή το 'δει' από μόνος του ότι πρέπει να βρεθεί το  $\frac{3}{4}$  του 10 πιθανόν να αντιμετωπίσει δυσκολία. Υπάρχουν μια σειρά από στρατηγικές

που μπορούν τα παιδιά να ακολουθήσουν για να λύσουν αυτή την άσκηση στηριζόμενοι στο υλικό που διαθέτουν. Μια στρατηγική είναι να χωρίσουν το πλέγμα σε 4 ίσα μέρη. Πιθανόν να ξεκινήσουν χωρίζοντας ανά 2 ρόμβους (ίσως με κάθετες γραμμές ή κύκλους ή όπως αλλιώς) και στο τέλος να συζητήσουν πώς θα χωρίσουν τους δύο τελευταίους ρόμβους. Εδώ μπορεί να χωρίσουν οριζόντια, μπορεί κάθετα ή όπως αλλιώς. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να εξασφαλίσει ότι υπάρχει συνέπεια στο χωρισμό σε ό,τι αφορά την επιφάνεια ή την περίμετρο-περίγραμμα και να βοηθήσει τα παιδιά να συνθέσουν τα τέταρτα. Τα παιδιά βρίσκουν πώς να συνθέσουν το  $\frac{1}{4}$ -δηλαδή δύο ρόμβοι και ένα δεύτερο ρόμβου- μετά τα  $\frac{2}{4}$  και τέλος τα  $\frac{3}{4}$  και να τα χρωματίζουν. Μια άλλη στρατηγική μπορεί να είναι με δοκιμή και πλάνη. Να δοκιμάσουν δηλαδή τα παιδιά ανά ένα ρόμβο και να δουν ότι περισσεύουν αρκετοί ή ανά τρεις και να δουν ότι δεν φτάνουν, κ.λπ. Άλλες στρατηγικές απαιτούν πιο δραστήρια την παρέμβαση του εκπαιδευτικού, όπως για παράδειγμα να δώσει κάποιο υλικό 'μονοδιάστατο' και διακριτό ο εκπαιδευτικός στα παιδιά με 10 μέρη και να τα προτρέψει να το μοιράσουν σε 4 ίσα μέρη. Αυτό το υλικό μπορεί να είναι καραμέλες, καλαμάκια, ένα αριθμητήριο 10 x 10 κ.λπ. Κατόπιν τα παιδιά εφαρμόζουν στην άσκηση τη στρατηγική που ανέπτυξαν με το παραπάνω υλικό. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αλλάξει το πλέγμα σε τετραγωνικό ή τριγωνικό ή κάγκελα, καθώς και τα κλάσματα, εάν κρίνει ότι πρέπει να βάλει ως στόχο την εμπέδωση των παραπάνω στρατηγικών των παιδιών.

Στη **σελίδα 50** το παιδί καλείται να παρατηρήσει ένα σκιάχτρο που αποτελείται από σχήματα-pattern blocks και να αναγνωρίσει αρχικά τα σχήματα που αντιπροσωπεύουν τα διαφορετικά μέλη του σώματος του σκιάχτρου. Το κεφάλι είναι ένα κανονικό εξάγωνο, ο κορμός ένα ισοσκελές τραπέζιο, τα χέρια ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, τα πόδια ίσοι ρόμβοι και βέβαια τα σχήματα σχετίζονται μεταξύ τους με τρόπους που έχουμε ήδη εξετάσει σε προηγούμενα φύλλα εργασίας. Στην πρώτη άσκηση το παιδί καλείται να εξετάσει τη σχέση ανάμεσα στα δύο χέρια της κούκλας και το κεφάλι της και να γράψει αυτή τη σχέση με μορφή κλάσματος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το σχετικό υλικό ή όχι, ανάλογα με τις ανάγκες του κάθε παιδιού. Κάποια παιδιά μπορεί να βρουν ότι το κάθε χέρι είναι το  $\frac{1}{6}$  του κεφαλιού άρα τα δύο χέρια είναι τα  $\frac{2}{6}$  του κεφαλιού, κάποιοι άλλοι ότι τα δύο χέρια μαζί ισοδυναμούν με ένα ρόμβο που είναι το  $\frac{1}{3}$  του κεφαλιού. Οι ιδέες-απαντήσεις παρουσιάζονται στην ολομέλεια και δίνουν μια ευκαιρία για την ανάδειξη και ανάπτυξη της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων. Στη δεύτερη άσκηση τα παιδιά πρέπει να συγκρίνουν τον κορμό με το κεφάλι της κούκλας και να γράψουν τη σχέση με μορφή κλάσματος χρησιμοποιώντας ή όχι το σχετικό υλικό. Ο κορμός είναι το  $\frac{1}{2}$  κεφαλιού της κούκλας.

Στην τρίτη άσκηση τα παιδιά πρέπει να συγκρίνουν τα πόδια της κούκλας με όλη την κούκλα. Η άσκηση αυτή εμπεριέχει δυσκολία γιατί το κλάσμα που προκύπτει δεν είναι γνωστό και αναγνωρίσιμο από την μέχρι τώρα δουλειά των παιδιών στα κλάσματα με βάση τα σχήματα. Μια στρατηγική είναι να υπολογιστούν όλα τα μέρη του σώματος της κούκλας με μονάδα μέτρησης το ισόπλευρο τρίγωνο-χέρι. Ήδη τα παιδιά έχουν υπολογίσει ότι το χρειάζονται 6 τρίγωνα για το κεφάλι. Θα πρέπει να υπολογίσουν ότι χρειάζονται 2 τρίγωνα για κάθε πόδι και 3 τρίγωνα για τον κορμό. Σε αυτούς τους υπολογισμούς μπορεί να τους βοηθήσει και το σχετικό υλικό. Κατόπιν αθροίζονται όλα αυτά τα μέρη εκφρασμένα σε αριθμό τριγώνων 6 (κεφάλι) + 3 (κορμός) +

2 (χέρια) + 4 (πόδια) = 15 μέρη-τρίγωνα αποτελούν όλη την κούκλα. Άρα τα πόδια της είναι  $\frac{4}{15}$  της κούκλας. Ανάλογα μπορούν τα παιδιά να υπολογίσουν ότι τα χέρια είναι τα  $\frac{2}{15}$  της κούκλας, κ.ο.κ.

Στην τελευταία άσκηση δίνονται 3 κανονικά εξάγωνα που εδώ αναπαριστούν το κεφάλι της κούκλας και ζητείται από τα παιδιά να κάνουν εικονική αναπαράσταση των χεριών, του κορμού και των ποδιών της κούκλας σε καθένα από αυτά. Τα παιδιά μπορεί πάλι να χρησιμοποιήσουν το σχετικό υλικό και μετά τις εικονικές αναπαραστάσεις να συζητήσουν τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων σχημάτων. Δηλαδή, αν στην πρώτη αναπαράσταση βάλω άλλο ένα τρίγωνο θα έχω τη δεύτερη και αν βάλω ένα ακόμη τρίγωνο στη δεύτερη θα έχω την τρίτη, κ.ά.



### Δραστηριότητες με ράβδους του Cuisenaire (μέρος Α)

Οι δραστηριότητες αυτές αναφέρονται στα κλάσματα και την αξία τους, καθώς και σε σχέσεις και συγκρίσεις μεταξύ ετερονύμων κλασμάτων των οποίων οι παρονομαστές είναι ακέραια πολλαπλάσια ακεραίου αριθμού. Τα κλάσματα χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν γεγονότα σε ρεαλιστικές καταστάσεις και περιβάλλοντα. Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει είτε το σχέδιο είτε τις ράβδους είτε και τα δύο για να επιλύσει τα προβλήματα που τίθενται μέσα από τις δραστηριότητες και βέβαια τη διαίσθησή του αρκεί να την ελέγχει με άλλους τρόπους. Ένα ζήτημα που θα απασχολήσει πιθανόν παιδιά και εκπαιδευτικό είναι η σχέση των κλασματικών μερών στα οποία χωρίζεται ο αριθμός, η ράβδος, η ακέραια μονάδα με το τι αντιπροσωπεύει το κάθε μέρος. Για παράδειγμα για να βρω τα  $\frac{2}{3}$  του 18 χωρίζω το 18 σε 3 ίσα μέρη, δηλαδή τρίτα, που το καθένα όμως περιέχει ή είναι 6. Αυτή η κατάσταση που είναι πολύπλοκη και για τον εκπαιδευτικό να τη διδάξει και για το παιδί να την κατανοήσει φαίνεται πως γίνεται πιο προσβάσιμη με τη χρήση υλικού και αποκτά νόημα. Η σπουδαιότητα των κλασματικών μερών θα φανεί στις δραστηριότητες παρακάτω κι ο εκπαιδευτικός πρέπει να βοηθήσει ώστε τα παιδιά του να κατανοήσουν μέσα από αυτές τις δραστηριότητες τις σχέσεις μέρους-όλου και πώς αυτές εκφράζονται λεκτικά και συμβολικά.

Στη **σελίδα 51** δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που παριστάνει μια ετικέτα. Το παιδί καλείται να κατασκευάσει μια δική του ετικέτα που είναι το  $\frac{1}{2}$  της αρχικής, μια άλλη  $\frac{2}{5}$  της αρχικής και τέλος μία  $\frac{3}{2}$  της αρχικής. Θα προσπαθήσει να ανακαλύψει τι σημαίνει το  $\frac{1}{2}$  της αρχικής ετικέτας, συσχετίζοντας το κλάσμα  $\frac{1}{2}$  με το μισό ή συζητώντας τι σημαίνει  $\frac{1}{2}$  (χωρίζω την ακέραια μονάδα-ετικέτα σε δύο ίσα μέρη και παίρνω το ένα -νέα ετικέτα). Μπορεί να μετρήσει με το χάρακά του την αρχική ετικέτα και να βρει το μήκος της 10 εκ. οπότε το  $\frac{1}{2}$  είναι 5 εκ.

Χρησιμοποιώντας το χάρακά του μπορεί να σχεδιάσει την ετικέτα μήκους 5 εκ. και πλάτους 1 εκ. (όπως φαίνεται από σχετική μέτρηση στην αρχική) στο διαθέσιμο χώρο. Μπορεί ακόμη να χρησιμοποιήσει και ράβδους του Cuisenaire και για την αρχική ετικέτα (σύγκριση ράβδου με σχέδιο) τη ράβδο του 10, να δει ή ξαναδεί ότι μπορεί να σχηματιστεί από δύο ράβδους του 5 και για την επόμενη τη ράβδο του 5 και μάλιστα να σχεδιάσει το περίγραμμά της. Παρόμοια μπορεί να ανακαλύψει τα  $\frac{2}{5}$  της αρχικής. Τα 5 ίσα μέρη της ετικέτας θα αντιστοιχούν σε 2 εκ. οπότε τα 2 τέτοια μέρη είναι 4 εκ. Και εδώ μπορεί είτε να σχεδιάσει ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 4 επί 1 εκ. είτε να σχεδιάσει το περίγραμμο της ράβδου του 4. Θα μπορούσε το παιδί ακόμη θα μπορούσε να είχε καλύψει την ετικέτα με 5 ράβδους του 2 πιθανόν καθοδηγούμενος από τον εκπαιδευτικό εάν προέκυπτε η σχετική ανάγκη.

Για την τελευταία ετικέτα γίνεται ανάλυση του  $\frac{3}{2}$ . Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ρωτήσει τα παιδιά πώς καταλαβαίνουν την έκφραση " $\frac{3}{2}$  της αρχικής". Τι σημαίνει τρία μέρη σε σχέση με τα δύο της ετικέτας; Μπορούν να το αντιληφθούν τα παιδιά διαισθητικά; Η ετικέτα θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την αρχική ετικέτα; Μπορούν να το παραστήσουν με ράβδους του Cuisenaire; Ανάλογα με τις ανταποκρίσεις των παιδιών ο εκπαιδευτικός οργανώνει τη δική του παρέμβαση και αφού αποφασίσουν όλοι για το μήκος της νέας ετικέτας τη σχεδιάζουν είτε με το χάρακα είτε με δύο ράβδους του Cuisenaire (του 10 και του 5), κ.λπ.

Η **σελίδα 52** αναφέρεται σε τρεις δρομείς που τρέχουν σε παράλληλους διαδρόμους που έχουν το ίδιο μήκος αλλά στη χρονική στιγμή που τους εξετάζουμε έχουν τρέξει διαφορετικά μέρη των διαδρόμων εκφρασμένα με κλάσματα. Το παιδί καλείται αρχικά να 'μαντέψει' ποιος αθλητής προηγείται των άλλων συγκρίνοντας νοερά τις διαδρομές που αντιστοιχούν στα κλάσματα. Τα κλάσματα είναι ετερόνυμα και φαίνεται πως η σύγκριση δεν είναι εύκολη παρά το ότι οι παρονομαστές είναι πολλαπλάσια του 2. Το παιδί θα πρέπει να τοποθετήσει νοερά τους αθλητές στις θέσεις που έχουν στο διάδρομο πιθανόν 'χωρίζοντας' νοερά το διάδρομο σύμφωνα με τον παρονομαστή του κλάσματος και προχωρώντας τον αθλητή ως εκεί που δηλώνει ο αριθμητής. Κάποια παιδιά πιθανόν να βοηθηθούν και από τη διαίσθησή τους. Ωστόσο απάντηση που να θέλει τον 3ο αθλητή να προηγείται είναι αναμενόμενη από παιδιά που θα 'δουν' ότι το  $\frac{5}{8}$  είναι μεγαλύτερο τόσο από το  $\frac{1}{2}$  όσο και από το  $\frac{3}{4}$  καθώς 'βλέπουν' τους αριθμούς του κλάσματος ανεξάρτητους. Για τα παιδιά αυτά -αλλά και για όλα- σημαντικό ρόλο θα παίξει το δεύτερο βήμα του ελέγχου, όπου ζητείται από τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τις ράβδους του Cuisenaire και να επιβεβαιώσουν τη σκέψη τους. Οι συνδυασμοί των δύο ράβδων που μπορούν να σχηματίσουν τις 16 μονάδες (εκ.) που είναι το μήκος του διαδρόμου είναι τρεις χωρίς τους συμμετρικούς τους, αλλά υπάρχουν αρκετοί συνδυασμοί για περισσότερες των τριών ράβδων. Ο συνδυασμός 8 και 8 μπορεί να δώσει άμεσα ότι το  $\frac{1}{2}$  του διαδρόμου είναι 8 μονάδες (εκ.). Ο συνδυασμός τεσσάρων ράβδων του 4 μπορεί να δώσει άμεσα ότι τα  $\frac{3}{4}$  του διαδρόμου είναι 12 μονάδες (εκ.). Ο συνδυασμός οχτώ ράβδων του 2 μπορεί να δώσει άμεσα ότι το  $\frac{5}{8}$  είναι 10 μονάδες (εκ.) και να συμπεράνουν τελικά ότι προηγείται ο 2ος αθλητής.

Στη **σελίδα 53** δίνεται σχεδιασμένο ένα καράβι του οποίου το 1ο κατάστρωμα αντιστοιχεί σε δύο ράβδους του Cuisenaire, τη ράβδο του 10 και τη ράβδο του 2. Το παιδί καλείται να σχεδιάσει το 2ο κατάστρωμα του καραβιού που θα είναι τα  $\frac{2}{3}$  του 1ου και το 3ο κατάστρωμα που θα είναι μικρότερο κατά  $\frac{1}{8}$  από το δεύτερο. Για να κατασκευάσει το 2ο κατάστρωμα μπορεί να σκεφτεί ποιες τρεις ίσες ράβδους πρέπει να τοποθετήσει για να φτιάξει το 12. Εάν σκεφτεί και επιβεβαιώσει με τοποθέτηση ότι χρειάζεται 3 ράβδους του 4, τότε βρίσκει ότι τα  $\frac{2}{3}$  είναι 8 και μπορεί να σχεδιάσει το επόμενο κατάστρωμα με μια ράβδο του 8 ή δύο ράβδους του 4, κ.λπ. Το αν θα τοποθετήσει (σχεδιάσει) το αποτέλεσμα της λύσης του έτσι ώστε να είναι ισαπέχει από τα άκρα του 1ου καταστρώματος ή το τοποθετήσει τυχαία είναι ένα άλλο θέμα που σχετίζεται με το τι πραγματικά συμβαίνει στα καράβια και χρειάζεται πιθανόν να συζητηθεί με τον εκπαιδευτικό και όλη την τάξη (φωτογραφίες από καράβια, internet κ.λπ.). Μια άλλη στρατηγική γι' αυτό το πρώτο ερώτημα πιθανόν να στηριζόταν στη χρήση του χάρακα και χειρισμό των μηκών εκφρασμένα σε εκ. Το όλο μήκος του 1ου καταστρώματος είναι 12 εκ., άρα τα  $\frac{2}{3}$  τα βρίσκουμε χωρίζοντας το μήκος 12 εκ. σε τρία ίσα μήκη των 4 εκ. για να πάρουμε τα δύο από αυτά συνολικού μήκους 8 εκ.

Το δεύτερο ερώτημα -εύρεση 3ου καταστρώματος- στηρίζεται στην απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος. Τι σημαίνει η έκφραση "μικρότερο κατά  $\frac{1}{8}$ " ενός μήκους 8 μονάδων για το παιδί; Το παιδί θα μπορούσε να φανταστεί το 2ο κατάστρωμα χωρισμένο σε 8 κομμάτια ή να τα σχεδιάσει, να τα κατασκευάσει και μετά να δείξει με κάποιο τρόπο ποιο είναι το  $\frac{1}{8}$  και τι απομένει εάν το αφαιρέσουμε από τα 8 κομμάτια. Αυτό που απομένει είναι το 7 και μπορεί να χρησιμοποιήσει τη ράβδο του 7 για να σχεδιάσει το 3ο κατάστρωμα πάνω από το 2ο. Για το σχεδιασμό ισχύει και εδώ ό,τι αναφέραμε για το σχεδιασμό του 2ου καταστρώματος. Άλλη στρατηγική που μπορεί να σκεφτεί το παιδί μπορεί να είναι η μέτρηση με το χάρακα και ο προσδιορισμός των 7 εκ. ως  $\frac{7}{8}$  των 8 εκ. που είναι κατά  $\frac{1}{8}$ , δηλαδή 1 εκ., μικρότερο από το μήκος των 8 εκ.

Η **σελίδα 54** αναφέρεται στην ανάλυση ενός αριθμού σε άθροισμα ίσων προσθετών ή γινόμενο ίσων παραγόντων. Ακόμη θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι αναφέρεται και στο χωρισμό της ακέραιας μονάδας σε κλασματικές που το άθροισμά τους δίνει ολόκληρη την ακέραια μονάδα. Η δραστηριότητα περιλαμβάνει πίνακες ανακοινώσεων στους οποίους πρέπει να τοποθετηθούν ισομεγέθεις ανακοινώσεις. Για το μέγεθος 6 χρειάζεται να βρεθούν τρεις διαφορετικοί τρόποι και για το μέγεθος 15 χρειάζονται δύο. Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει ράβδους του Cuisenaire για να βοηθηθεί στη αναζήτηση των λύσεων. Ο εκπαιδευτικός θα χρειαστεί πιθανόν να υπογραμμίσει ότι το ζητούμενο είναι οι ανακοινώσεις να είναι "ίσου μεγέθους". Τα παιδιά θα πρέπει να δουν σε πόσα ίσα μέρη μπορεί να χωριστεί η ράβδος του 6 ή ο αριθμός 6 ή τα 6 εκ. Πιθανές λύσεις είναι 3 ράβδοι του 2, 2 ράβδοι του 3, 6 ράβδοι του 1. Με παρόμοιο τρόπο αναζητούνται λύσεις και για το μέγεθος 15. Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν ράβδους του Cuisenaire και να προσδιορίσουν ότι μπορεί να έχουν 3 ανακοινώσεις-ράβδους του 5, 5 ανακοινώσεις-ράβδους του 3, 15 ανακοινώσεις-ράβδους του 1.



Η **σελίδα 55** αναφέρεται στη σύγκριση κλασμάτων που έχουν παρονομαστές πολλαπλάσια ενός αριθμού, στην προκειμένη περίπτωση του 3. Το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται η δραστηριότητα δημιουργείται μέσα από την προσπάθεια των παιδιών να φτάσουν ένα βάζο με γλυκό που βρίσκεται στην κορυφή ενός ντουλαπιού διαλέγοντας το καταλληλότερο σκαμνάκι. Τα σκαμνάκια που πρέπει να κατασκευάσουν τα παιδιά θα έχουν διαφορετικά ύψη, τα οποία όμως συναρτώνται με το ύψος του ντουλαπιού. Τα σκαμνάκια θα έχουν ύψος τα  $\frac{2}{3}$ , τα  $\frac{3}{6}$  και τα  $\frac{6}{9}$  του ντουλαπιού. Είναι φανερό πως τα παιδιά πρέπει να διαλέξουν το πιο ψηλό σκαμνάκι για να φτάσουν το βάζο και έτσι προκύπτει η σύγκριση των τριών κλασμάτων-υψών. Το ντουλάπι έχει ύψος 18 μονάδες ή εκ. Εάν τα παιδιά χρησιμοποιήσουν ράβδους του Cuisenaire θα μπορούσαν να σχηματίσουν το ύψος του ντουλαπιού με διάφορους τρόπους. Ωστόσο είναι πιθανόν να παρατηρήσουν ότι εφόσον χρειάζεται να κατασκευάσουν τα  $\frac{2}{3}$ , θα ήταν καλύτερο να βρουν ποιες τρεις ράβδοι έχουν άθροισμα 18 ώστε να προσθέσουν τις δύο από αυτές. Έτσι βρίσκουν άμεσα ότι αφού 3 ράβδοι του 6 κάνουν 18 τότε οι δύο είναι 12, άρα 12 μονάδες είναι το ύψος για το πρώτο σκαμνάκι. Εάν δεν ακολουθηθεί αυτή η στρατηγική και τα παιδιά επιλέξουν άλλους συνδυασμούς του 18, για παράδειγμα ράβδο του 10 και ράβδο του 8, θα είναι δύσκολο για τα παιδιά να προσδιορίσουν τα  $\frac{2}{3}$ . Σε αυτή την περίπτωση ο εκπαιδευτικός συζητά με τα παιδιά για να καταλήξουν σε κάποιο προσφορότερο συνδυασμό. Εάν τα παιδιά χρησιμοποιήσουν χάρακα, μπορεί με διάφορους τρόπους ακόμη και με το μάτι να προσδιορίσουν που θα είναι ο χωρισμός στα 3 ίσα μέρη και να προχωρήσουν στον προσδιορισμό των  $\frac{2}{3}$  των 18 εκ.

Για το σκαμνάκι των  $\frac{3}{6}$  μπορεί τα παιδιά να εφαρμόσουν διάφορες στρατηγικές. Μία στρατηγική μπορεί να είναι να απλοποιήσουν το κλάσμα, δηλαδή να το κάνουν  $\frac{1}{2}$  πιθανόν διαισθητικά ή παρατηρώντας τη σχέση αριθμητή παρονομαστή ή όπως αλλιώς, και να προσδιορίσουν ότι το σκαμνάκι αυτό θα έχει ύψος 9 μονάδες με τη χρήση ράβδων ή 9 εκ. με τη χρήση του χάρακα. Εάν δεν απλοποιήσουν το κλάσμα, θα ακολουθήσουν τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω για το προηγούμενο σκαμνάκι. Θα πρέπει να ανακαλύψουν ποιες 6 ίσες ράβδοι σχηματίζουν το 18 και βρίσκοντας ότι είναι 6 ράβδοι του 3 να μπορέσουν να υπολογίσουν ότι 3 φορές το 3 είναι 9 μονάδες το ύψος από το δεύτερο σκαμνάκι. Εάν τα παιδιά χρησιμοποιήσουν το χάρακα, θα πρέπει να βρουν τρόπους (διαίρεση, πολλαπλασιασμό, πρόσθεση με δοκιμή και πλάνη, κ.ο.κ.) για να προσδιορίσουν πόσο θα είναι το ένα από τα 6 μέρη που θα χωριστούν τα 18 εκ. και να προχωρήσουν στην εύρεση των  $\frac{3}{6}$ .

Για το σκαμνάκι των  $\frac{6}{9}$  μπορεί να ακολουθηθούν στρατηγικές παρόμοιες με αυτές που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Εάν με κάποιον τρόπο τα παιδιά απλοποιήσουν το κλάσμα και προκύψει το κλάσμα  $\frac{2}{3}$  θα συνειδητοποιήσουν ότι το τρίτο σκαμνάκι θα έχει το ίδιο ύψος με το πρώτο σκαμνάκι δηλαδή 12 μονάδες ή εκ. Άρα μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιοδήποτε από τα δύο αυτά σκαμνάκια 1ο ή 3ο για να φτάσουν το βάζο. Εάν χρησιμοποιήσουν ράβδους του Cuisenaire χωρίς απλοποίηση του κλάσματος, τότε θα χρειαστεί να εντοπίσουν 9 ράβδους του 2 για να μπορέσουν να βρουν ότι 6 τέτοιες ράβδοι ισοδυναμούν με 12, κ.λπ.

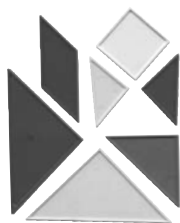
Στη **σελίδα 56** δίνεται το μέρος μιας ακέραιας μονάδας-σοκολάτας και ζητείται να βρεθεί το όλο, δηλαδή ολόκληρη η σοκολάτα. Το παιδί καλείται να εντοπίσει τη ράβδο που αντιστοιχεί στο σχεδιασμένο μέρος της σοκολάτας. Είναι η ράβδος του 3 που αντιστοιχεί στα  $\frac{3}{5}$  της σοκολάτας. Αναλύοντας τη σημασία του  $\frac{3}{5}$  (έχω 5 ίσα μέρη και έχω πάρει τα 3) και ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία αυτής της σκέψης, δηλαδή έχω τα 3 μέρη και ψάχνω τα 5, μπορεί το παιδί να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος και να σχεδιάσει ολόκληρη τη σοκολάτα χρησιμοποιώντας τη ράβδο του 5. Με την ερώτηση "είναι τα  $\frac{3}{5}$  της σοκολάτας που κατασκεύασες η πράσινη σοκολάτα;" το παιδί καλείται να επιβεβαιώσει τη λύση που έδωσε. Βέβαια επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση τα  $\frac{3}{5}$  αντιστοιχούν στο 3 η εύρεση της λύσης μοιάζει πιο εύκολη. Εάν στη θέση του 3 υπήρχε ένας άλλος αριθμός πολλαπλασίου του, όπως για παράδειγμα το 6, το παιδί θα έπρεπε να σκεφτεί άλλες στρατηγικές για την επίλυσή του. Πιθανόν να σκεφτόταν ότι αφού το 6 είναι τα  $\frac{3}{5}$  της σοκολάτας, δηλαδή  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$  είναι 6, τότε κάθε  $\frac{1}{5}$  είναι 2 και άρα τα  $\frac{5}{5}$ , κ.λπ.

Η **σελίδα 57** αναφέρεται στο ίδιο μαθηματικό ζήτημα όπως και η προηγούμενη αλλά σε ένα άλλο πλαίσιο. Το παιδί καλείται να ασχοληθεί με το πρόβλημα του κ. Βαλάντη, του μαραγκού, που χρειάζεται να μετατρέψει τους πασσάλους Β, Γ και Δ που έχουν διαφορετικό μέγεθος σε πασσάλους ίδιου μεγέθους με τον πάσσαλο Α. Το παιδί καλείται να βρει τα κλάσματα που εκφράζουν το κομμάτι που λείπει από τους πασσάλους Β, Γ και Δ σε συνάρτηση με τον πάσσαλο Α για να κολληθεί και να γίνει ίδιου μήκους με τον τελευταίο. Ο πάσσαλος Α έχει ύψος 12 μονάδες ή εκ., και στο φύλλο εργασίας αποτελείται από τη ράβδο του 10 και την ράβδο του 2, ο πάσσαλος Β έχει ύψος 6, ο πάσσαλος Γ έχει ύψος 8 και ο πάσσαλος Δ έχει ύψος 3.

Το παιδί εμπλέκεται στο σενάριο για να βοηθήσει τον κ. Βαλάντη και αυτό του δίνει ένα κίνητρο να βρει με ακρίβεια τις λύσεις που απαιτούνται. Ξεκινώντας από τον πάσσαλο Β μπορεί να χρησιμοποιήσει ράβδους του Cuisenaire και να σχηματίσει το υπόλοιπο κομμάτι με μια ράβδο του 6. Εάν κάνει αυτή την επιλογή, βλέπει ότι έχει δύο βάρια από τα οποία του λείπει το ένα, δηλαδή το  $\frac{1}{2}$  του πασσάλου Α. Εάν δεν το 'δει' έτσι, τότε μπορεί να απαντήσει ότι λείπουν τα  $\frac{6}{12}$  του πασσάλου Α. Εάν χρησιμοποιήσει άλλες ράβδους για να συμπληρώσει το κομμάτι που λείπει, για παράδειγμα δύο ράβδους του 3, ή τρεις ράβδους του 2, ή μία ράβδο του 4 και μία του 2, θα πρέπει να τις προσθέσει και να βρει το άθροισμα σε δωδέκατα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να παρέμβει και να θέσει σε διαπραγμάτευση τις διαφορετικές λύσεις με βάση το ρεαλιστικό επιχείρημα ότι πολλά κομμάτια σημαίνει πολλές ενώσεις-κολλήσεις που κάνουν τον πάσσαλο πιο εύθραυστο, κ.λπ. Έτσι τα παιδιά οδηγούνται στην παραπάνω λύση με τα  $\frac{6}{12}$  ή  $\frac{1}{2}$ . Ένα ζήτημα που προκύπτει γενικά εδώ και ανάλογα θα προκύψει και για τους άλλους πασσάλους αφορά στον παρονομαστή: το παιδί θα πρέπει να εκφράσει τη ράβδο 6 σε κλάσμα  $\frac{6}{12}$  ή στην καλύτερη περίπτωση  $\frac{1}{2}$ . Για το δεύτερο έχει ήδη αναφερθεί το σχετικό σκεπτικό. Για το πρώτο πιθανόν να χρειαστεί η παρέμβαση του εκπαιδευτικού για να καθοριστεί ο παρονομαστής του κλάσματος αποδίδοντας νόημα σε

αυτόν με βάση τις 12 μονάδες από τις οποίες αποτελείται ο Α, που αποτελεί τον πάσσαλο στον οποίο αναφέρονται και κάνουν τις σχετικές συγκρίσεις.

Για τον πάσσαλο Γ που αποτελείται από 2 ράβδους του 4 είναι πιθανόν το παιδί να βρει άμεσα ότι χρειάζεται μία ράβδος του 4 για να συμπληρώσει τον πάσσαλο Α και αυτό το κομμάτι αποτελεί τα  $\frac{4}{12}$  του Α πασσάλου. Για να μπορέσει το παιδί να φτάσει να πει ότι αυτό το κομμάτι είναι το  $\frac{1}{3}$  του Α θα πρέπει να δει το σύνολο των κομματιών που έχουν χρησιμοποιηθεί, δηλαδή τις 3 ράβδους του 4. Αυτή η προσέγγιση είναι πιθανόν πιο σχετική με την όλη εργασία που έχει προηγηθεί με το υλικό από μια προσέγγιση που θα στηρίζεται σε απλοποίηση του κλάσματος  $\frac{4}{12}$ . Η απλοποίηση είναι ίσως μια διαδικασία που θα προκύψει ως αποτέλεσμα της σύγκρισης της λύσης  $\frac{4}{12}$  και αυτής του  $\frac{1}{3}$ . Ο εκπαιδευτικός είναι εκείνος που θα εξετάσει τις συνθήκες που έχουν δημιουργηθεί με τη δραστηριότητα αυτή στην τάξη του για να αποφασίσει το αν θα βάλει τα παιδιά να ασχοληθούν με την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων και τον αλγόριθμο της απλοποίησης. Για τον πάσσαλο Δ που είναι μία ράβδος του 3 το παιδί μπορεί να συμπληρώσει με διάφορες ράβδους για να φτάσει το 12 του Α (ράβδο του 9 ή ράβδο του 8 και του 1, κ.ο.κ.). Μπορεί να υπάρξει και παιδί που θα παρατηρήσει ότι τα 9 που απομένουν ως το 12 μπορούν να σχηματιστούν με 3 ράβδους του 3. Σε κάθε περίπτωση θα βρει τα  $\frac{9}{12}$  αλλά θα είναι δυσκολότερο να βρει τα  $\frac{3}{4}$ . Προς την κατεύθυνση αυτή μπορεί να βοηθήσει η εμπειρία από τις προηγούμενες ασκήσεις αυτής της δραστηριότητας ή η εργασία σε ομάδες με την ανταλλαγή απόψεων.



## Δραστηριότητες με το Τάνγκραμ (μέρος Β)

Στο επίπεδο 1 έχουμε ήδη αναφερθεί στο τι είναι το Τάνγκραμ, πού και πώς συνήθως χρησιμοποιείται.

Στη **σελίδα 58** τα κομμάτια του Τάνγκραμ χρησιμοποιούνται για να υποστηριχθούν οι έννοιες του μισού και του διπλάσιου με επιφανειακό μοντέλο. Τα κομμάτια που χρησιμοποιούνται σε αυτό το φύλλο εργασίας είναι το μεσαίο τρίγωνο Κ και το μικρό τρίγωνο Λ, το παραλληλόγραμμο Μ και το τετράγωνο Ν. Το τετράγωνο είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε να μην παραπέμπει στη στερεότυπη αναπαράσταση του σχήματος. Το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει τα κομμάτια του Τάνγκραμ για να βρει την αλήθεια ή όχι τεσσάρων προτάσεων. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να ζητήσει από τα παιδιά να συζητήσουν στην ομάδα τους και να προσπαθήσουν να απαντήσουν στα τέσσερα ερωτήματα πριν επιβεβαιώσουν τις απαντήσεις με τα κομμάτια του Τάνγκραμ.

Η πρώτη πρόταση που πρέπει να εξετάσει το παιδί είναι εάν το Λ είναι διπλάσιο του Ν. Το παιδί διαπιστώνει ότι στο Ν χωρούν δύο τρίγωνα Λ και ως εκ τούτου η πρόταση δεν είναι αληθής.

Την ίδια στιγμή μπορεί να συζητήσει στην ομάδα του με παρότρυνση του εκπαιδευτικού και να διατυπώσει είτε προφορικά είτε ακόμη καλύτερα γραπτά δύο αληθείς προτάσεις για τη σχέση των  $\Lambda$  και  $N$ , δηλαδή ότι το  $\Lambda$  είναι το μισό του  $N$  και ότι το  $N$  είναι το διπλάσιο του  $\Lambda$ . Η δεύτερη εκδοχή απαντά αυτόματα στη δεύτερη πρόταση του φύλλου εργασίας. Για την τρίτη πρόταση που είναι αληθής αρκεί η επιβεβαίωση με τα κομμάτια του Τάνγκραμ. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει και άλλη μια πρόταση αληθή για τη σχέση των  $\Lambda$  και  $M$ , δηλαδή ότι το  $M$  είναι διπλάσιο του  $\Lambda$ . Για την τέταρτη πρόταση θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το  $\Lambda$  για να επιβεβαιώσει ότι δεν είναι αληθής. Ο εκπαιδευτικός μπορεί και πάλι να ζητήσει από τα παιδιά να διατυπώσουν την αληθή πρόταση για τη σχέση των  $K$  μια και  $M$ , δηλαδή ότι το  $K$  όπως και το  $M$  σχηματίζονται από δύο  $\Lambda$ .

Στη **σελίδα 59** τα τρίγωνα του Τάνγκραμ μεγάλο  $A$ , μεσαίο  $B$  και μικρό  $\Gamma$  χρησιμοποιούνται για να προσεγγιστούν οι κλασματικές μονάδες  $\frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{4}$  με το επιφανειακό μοντέλο. Το παιδί καλείται να συγκρίνει τα τρίγωνα του Τάνγκραμ και να εκφράσει με κλάσμα τις σχέσεις ανάμεσα τους σε σύγκριση με το τρίγωνο  $A$ . Δηλαδή να συγκρίνει και να διαπιστώσει ότι το  $B$  είναι το  $\frac{1}{2}$  του  $A$  και το  $\Gamma$  είναι το  $\frac{1}{4}$  του  $A$  ή το  $\frac{1}{2}$  του  $B$ .

Στη **σελίδα 60** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει τα κομμάτια του Τάνγκραμ και να σχεδιάσει σπιτάκια. Η δραστηριότητα είναι ανοιχτή γιατί το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει όποια κομμάτια θέλει αρκεί να βάζει κάποια σκεπή και κατόπιν να βρίσκει τι μέρος του σπιτιού είναι η σκεπή του και να την εκφράζει με κλάσμα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προμηθεύσει στα παιδιά περισσότερα σετ Τάνγκραμ για να έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν ίδια κομμάτια. Οι συνδυασμοί που μπορούν να κάνουν τα παιδιά είναι πάρα πολλοί. Υπάρχει το ενδεχόμενο τα παιδιά να κάνουν και κατασκευές μη ρεαλιστικές, για παράδειγμα να βάλουν το μικρό τρίγωνο σκεπή σε ένα σπιτάκι που το κύριο σώμα του κατασκευάστηκε από τα δύο μεγάλα τρίγωνα. Ακόμη μπορεί να κάνουν το σπιτάκι με κάποια κομμάτια και με τα υπόλοιπα κομμάτια να κάνουν διάφορα συμπληρωματικά κτήρια, για παράδειγμα γκαράζ ή διακοσμητικά μέρη, για παράδειγμα κήπο, κ.λπ. Και στις δύο περιπτώσεις αυτό που ενδιαφέρει είναι το κλάσμα που εκφράζει το μέρος-σκεπή σε σχέση με το όλο-σπιτάκι. Άρα δεν μας ενοχλεί εάν το σπιτάκι δεν είναι ρεαλιστικό ούτε αν υπάρχουν τα άλλα μέρη. Στη δεύτερη περίπτωση θα μπορούσε να διατυπωθεί και ένα δεύτερο ερώτημα, ανεξάρτητα από το πρώτο, δηλαδή να εκφραστεί με κλάσμα τι μέρος είναι η σκέπη σε σχέση με την όλη σύνθεση, αλλάζοντας σε αυτή την περίπτωση το όλο.

Οι επόμενες δύο σελίδες αναφέρονται στη δραστηριότητα "Η γάτα". Στη **σελίδα 62** υπάρχει σχεδιασμένη μία γάτα για το σχέδιο της οποίας έχουν χρησιμοποιηθεί τα 6 από τα 7 κομμάτια του Τάνγκραμ -δεν έχει χρησιμοποιηθεί το τετράγωνο. Στην πρώτη από αυτές τις σελίδες ζητείται από το παιδί να εκφράσει με κλάσματα, λεκτικά και συμβολικά, διάφορα μέρη του σώματος της γάτας σε σχέση με το όλο που είναι το κεφάλι της γάτας. Τα μέρη είναι τα εξής: το ένα αυτί της γάτας, τα δύο της αυτιά μαζί. Το παιδί παρατηρεί αρχικά ποια κομμάτια αποτελούν ποια μέρη της γάτας ή τοποθετεί τα αντίστοιχα κομμάτια του Τάνγκραμ πάνω σε αυτά. Για τα δύο αυτιά έχουν χρησιμοποιηθεί τα δύο μικρά τρίγωνα, για το κεφάλι και το σώμα τα δύο μεγάλα, ενώ για τα πόδια το μεσαίο τρίγωνο και για την ουρά το παραλληλόγραμμο. Τα παιδιά έχουν επανειλημμένα εργαστεί πάνω στις σχέσεις των κομματιών του Τάνγκραμ και πιθανόν να θυμούνται ότι χρειά-

ζονται 4 μικρά τρίγωνα για να καλύψουν το μεγάλο τρίγωνο που εδώ είναι το κεφάλι της γάτας και άρα το μικρό τρίγωνο είναι το ένα τέταρτο ή αλλιώς το  $\frac{1}{4}$  του μεγάλου τριγώνου, δηλαδή του κεφαλιού της γάτας. Εάν δεν το θυμούνται, επαναλαμβάνουν τη διαδικασία της κάλυψης για να καταλήξουν στο παραπάνω συμπέρασμα. Για τα δύο αυτιά μαζί τα παιδιά μπορούν να συμπεράνουν απευθείας ότι είναι τα δύο τέταρτα ή  $\frac{2}{4}$  του κεφαλιού της γάτας βασιζόμενοι στην προηγούμενη διαπίστωση, ή να τα επιβεβαιώσουν με τα κομμάτια του Τάνγκραμ που έχουν χρησιμοποιήσει για τα δύο αυτιά τοποθετώντας τα στο κεφάλι της γάτας. Το αν τα παιδιά σκεφτούν το ισοδύναμο κλάσμα  $\frac{1}{2}$  ή σκεφτούν ότι τα  $\frac{2}{4}$  είναι το μισό κεφάλι είναι πιθανόν να εξαρτηθεί από την πρότερη εμπειρία των παιδιών σε ανάλογες περιστάσεις.

Στο δεύτερο μέρος του φύλλου εργασίας μαθαίνουμε ότι ο μάγος Δρακουμέλ έχει εξαφανίσει τα πόδια της γάτας. Ένα βασικό σημείο που πρέπει να προσεχθεί από τα παιδιά είναι ότι στην προκειμένη περίπτωση το όλο αλλάζει και δεν είναι το κεφάλι αλλά ολόκληρη η γάτα. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να εστιάσει την προσοχή των παιδιών σε αυτό το ζήτημα, ώστε να αντιληφθούν ότι διαφοροποιείται ο παρονομαστής του κλάσματος που ζητείται. Ο παρονομαστής μπορεί να μην αποκαλυφθεί και οι ομάδες να εργαστούν ώστε να προσδιορίσουν τον παρονομαστή ως μέρος της λύσης του όλου προβλήματος. Τα παιδιά μπορεί να ακολουθήσουν διάφορες στρατηγικές. Μια στρατηγική μπορεί να είναι να βρουν πόσα μικρά τρίγωνα καλύπτουν όλη τη γάτα -ήδη έχουν βρει ότι το κεφάλι καλύπτεται από 4 μικρά τρίγωνα. Κατόπιν αθροίζουν τα μικρά τρίγωνα που απαρτίζουν τα μέρη του σώματος που έχουν απομείνει οπότε θα έχουν απομείνει τα  $\frac{12}{14}$  της γάτας.

Στη **σελίδα 63** παρουσιάζεται σχεδιασμένο ένα ριγέ χαλί με 10 ρίγες των διαστάσεων των ράβδων του Cuisenaire. Το παιδί καλείται να χρωματίσει με ό,τι χρώματα θέλει τα  $\frac{5}{10}$  του χαλιού και να έρθει σε επαφή με τα δεκαδικά κλάσματα. Είτε με ράβδους του Cuisenaire είτε βοηθούμενος από το σχέδιο το παιδί μπορεί να μετρήσει και να βρει ότι όλες οι ρίγες είναι 10 -το όλο- και ότι τα  $\frac{5}{10}$  των ριγών θα είναι 5 ρίγες -το μέρος-. Το ότι το χαλί είναι χωρισμένο σε ρίγες βοηθά στην επίλυση του προβλήματος. Ωστόσο ο εκπαιδευτικός μπορεί να θελήσει να βοηθήσει τα παιδιά να εμβαθύνουν περαιτέρω παροτρύνοντάς τους να αναγνωρίσουν ότι τα  $\frac{5}{10}$  είναι το μισό χαλί -αν δεν το έχουν ήδη κάνει από μόνοι τους- και να προσπαθήσουν να το συνδέσουν με το δεκαδικό αριθμό 0,5 που πιθανόν θα έχουν ως τότε συναντήσει. Επιπλέον, μπορεί κάποιο παιδί να μη θελήσει να χρωματίσει τις ρίγες συνεχόμενες αλλά 5 ρίγες ανακατεμένα ή ανά δεύτερη ή ακόμη και να ακολουθήσει δικό του χωρισμό, πιθανόν οριζόντιες ρίγες ή διαγώνιες ή ό,τι άλλο. Ο εκπαιδευτικός το βοηθά να συζητήσει την ιδέα του ελέγχοντας το εάν τα κομμάτια είναι ίσα, κ.λπ. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να αναγνωρίσουν και άλλα δέκατα,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{2}{10}$ , κ.λπ. και τη σχέση μεταξύ τους.

Στη **σελίδα 64** το παιδί συναντά τα δεκαδικά κλάσματα σε ένα άλλο πλαίσιο. Καλείται να βρει τέσσερις πόλεις που τα ονόματά τους να έχουν το πολύ 10 γράμματα και να τα γράψουν

σε πίνακες των 10 θέσεων το καθένα χωριστά. Κατόπιν θα πρέπει να γράψουν τον αριθμό των κουτιών που χρησιμοποιήθηκαν για τα γράμματα και να εκφράσουν με δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό το μέρος της πινακίδας που γέμισε με γράμματα. Η δραστηριότητα μπορεί να υποστηριχθεί και από το χάρτη της Ελλάδας ή της Ευρώπης για την εύρεση των ονομάτων των πόλεων και θα ήταν καλό τα παιδιά να εργαστούν ανά δύο στο χάρτη και το χαρτί. Το παιδί γράφει στον πίνακα το όνομα της πόλης και κατόπιν χρειάζεται να συμπληρώσει σε ένα πινακίδιο με τρεις διαφορετικούς τρόπους το αποτέλεσμα της εργασίας που έκανε. Πρώτα το παιδί πρέπει να γράψει με ακέραιο αριθμό πόσα κουτάκια από τα 10 γέμισε με γράμματα. Κατόπιν το παιδί πρέπει να εκφράσει τον αριθμό των γραμμάτων ως δεκαδικό κλάσμα και τέλος αυτόν τον αριθμό ως δεκαδικό προσέχοντας τη γραφή με την υποδιαστολή. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται και για τις τέσσερις πόλεις. Εάν τα παιδιά βρουν πόλεις με δέκα γράμματα, τότε έχουμε την ακέραια μονάδα. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να πάρει και μορφή παιχνιδιού ανάμεσα σε ομάδες αφού ο εκπαιδευτικός βάλει ως όριο κάποιο αριθμό γραμμάτων. Σε κάθε περίπτωση το παιδί διαπιστώνει ότι το ίδιο γεγονός μπορούμε να το εκφράσουμε με διαφορετικούς μαθηματικούς τρόπους χωρίς να το αλλοιώσουμε.

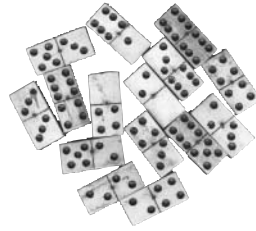
Η **σελίδα 65** ασχολείται με τα δεκαδικά κλάσματα που έχουν παρονομαστή το εκατό. Στο φύλλο εργασίας δίνεται σχεδιασμένη μια τετράγωνη κορνίζα 10 επί 10 και ζητείται από τα παιδιά να τοποθετήσουν μια φανταστική φωτογραφία  $\frac{36}{100}$  (τριανταέξι εκατοστών) σε όποια θέση της κορνίζας θέλουν. Το παιδί θα πρέπει να σκεφτεί τι σχήμα θα μπορούσε να έχει η φωτογραφία. Ακολουθώντας δοκιμή και πλάνη, το παιδί θα μπορούσε να χρωματίσει τρεις σειρές από 10 τετραγωνάκια και μια τέταρτη με 6, όμως το σχήμα που προκύπτει δεν θυμίζει φωτογραφία, άρα η λύση δεν είναι αποδεκτή. Κι άλλες παρόμοιες λύσεις θα συζητηθούν για το αν μπορούν να γίνουν δεκτές εφόσον δεν θυμίζουν φωτογραφίες, όπως τις έχουμε συνηθίσει. Για την περίπτωση του  $10 + 10 + 10 + 6$  μπορεί κάποιο παιδί να πάρει τα 6 και να τα τοποθετήσει ανά 2 στις 3 σειρές. Έτσι θα έχει μια φωτογραφία σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων  $3 \times 12$ . Μέσα από αυτή τη λύση μπορεί να προκύψουν και άλλες παρόμοιες λύσεις, όπως για παράδειγμα να πάρει 3 τετραγωνάκια από καθεμιά από τις 3 σειρές και να φτιάξει μία τέταρτη κι έτσι η φωτογραφία να είναι πάλι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων αυτή τη φορά  $4 \times 9$ . Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει το ερώτημα εάν μπορεί να υπάρξει φωτογραφία σχήματος τετραγώνου εφόσον αυτή η λύση δεν προκύψει από τα παιδιά. Η λύση μπορεί να δοθεί με δοκιμή και πλάνη σε τετραγωνισμένο χαρτί ή σε συνδυασμό με γνώση του γινομένου  $6 \times 6 = 36$ . Μπορεί να υπάρξουν προτάσεις για φωτογραφίες σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων  $2 \times 18$ . Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ρωτήσει "Πόσος χώρος μένει στην κορνίζα ακάλυπτος" και να ζητήσει να εκφραστεί με δεκαδικό κλάσμα σε εκατοστά, κ.λπ.

Η **σελίδα 66** αναφέρεται στη σχέση των δεκαδικών κλασμάτων με τα υπόλοιπα κλάσματα. Δίνεται ένα παράθυρο 10 επί 10 χωρισμένο σε 100 τετραγωνάκια-υαλότουβλα και ορίζεται ότι το  $\frac{1}{4}$  αυτών έχουν χρώμα κίτρινο και τα υπόλοιπα λευκά. Το παιδί καλείται με βάση αυτό το δεδομένο να βρει πόσα υαλότουβλα είναι κίτρινα και να εκφράσει τον αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή εκατοστά και σε δεκαδικό αριθμό. Μια στρατηγική που μπορεί να εφαρμόσει το παιδί είναι να προσπαθήσει να χωρίσει το παράθυρο σε 4 ίσα μέρη. Αυτό μπορεί να γίνει είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά. Εάν 'δει' το παράθυρο ως ένα τετράγωνο, μπορεί να το χωρίσει σε

τέσσερα ίσα μέρη με το 'σταυρό' -μία οριζόντια και μία κάθετο γραμμή, ή με τις διαγωνίους, ή με άλλη μέθοδο πιθανόν από αυτές που συζητήθηκαν σε παλαιότερη δραστηριότητα με το γεωπίνακα. Εάν επιλέξει το 'σταυρό' θα δημιουργηθούν 4 μέρη διαστάσεων  $5 \times 5$ , ένα εκ των οποίων μπορεί να χρωματίσει. Εάν επιλέξει τις διαγωνίους, θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να συζητήσει με τα παιδιά εάν αυτή η λύση που είναι αποδεκτή θεωρητικά, μπορεί να είναι και στην πραγματικότητα αφού δεν είναι δυνατόν το μισό υαλότουβλο (τρίγωνο) να είναι κίτρινο και το άλλο μισό (τρίγωνο) άσπρο. Άλλες λύσεις που σέβονται την πραγματικότητα είναι επίσης αποδεκτές, για παράδειγμα δύο και μισή σειρές από υαλότουβλα. Σε αυτές τις περιπτώσεις συμπληρώνει στα αντίστοιχα τετραγωνάκια 25 υαλότουβλα ή  $\frac{25}{100}$  του παράθυρου ή 0,25 του παράθυρου. Βέβαια, από τη στιγμή που αναγνωρίζεται -όταν και όποτε γίνει αυτό αυτόματα ή υποκινημένα- ότι το  $\frac{1}{4}$  μπορεί να είναι ένα τετράγωνο διαστάσεων  $5 \times 5$  το παιδί μπορεί να το τοποθετήσει σε όποιο μέρος του παράθυρου θέλει, να αρχίζει από την τέταρτη σειρά ή από την έκτη στήλη κ.λπ. και όχι αναγκαστικά σε μια από τις τέσσερις γωνίες του. Θα είναι ενδιαφέρον να ζητήσει ο εκπαιδευτικός από τα παιδιά να σκεφτούν ποια κατά την άποψή τους είναι η καλύτερη θέση και να δικαιολογήσουν την άποψή τους (ποια κριτήρια βάζουν για την επιλογή της θέσης κ.λπ.).

Η αλγεβρική λύση μπορεί να περιλαμβάνει να χωριστεί ο αριθμός 100 στα 4 ή να γίνει διαίρεση  $100:4$  ώστε να βρεθεί το  $\frac{1}{4}$  των υαλότουβλων. Μια άλλη στρατηγική που μπορεί να εφαρμόσει το παιδί είναι να μετατρέψει τα τέταρτα σε εκατοστά πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με το 25, αλλά αυτό είναι μάλλον μια στρατηγική που μπορεί να τη συζητήσει ο εκπαιδευτικός με τα παιδιά θέτοντάς το και ως μια αντίστροφη πορεία της στρατηγικής που περιγράφηκε προηγουμένως.

Η **σελίδα 67** αναφέρεται επίσης στα δεκαδικά κλάσματα και τη σχέση τους με τους δεκαδικούς αριθμούς μέσα από ένα νέο πλαίσιο. Το παιδί καλείται να υπολογίσει πόσα εκατοστά από το δίχτυ καταστράφηκαν και να το εκφράσει με δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό. Το δίχτυ είναι σχεδιασμένο ως τετράγωνο  $10 \times 10$  και χωρισμένο σε τετραγωνάκια-εκατοστά εκτός από το κατεστραμμένο μέρος. Αυτό είναι κενό και το παιδί πρέπει να φανταστεί τα τετραγωνάκια για να τα μετρήσει. Ένας άλλος τρόπος είναι να μετρήσει σε κάθε στήλη ή σε κάθε γραμμή τα τετραγωνάκια που φαίνονται και να υπολογίσει πόσα λείπουν ως το 10. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να μετρά ή σε στήλες ή σε γραμμές και όχι και στα δύο γιατί το αποτέλεσμα δεν θα είναι ακριβές. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προκαλέσει τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν πάνω σε αυτό. Τέλος μπορεί να μετρήσει όλα τα τετραγωνάκια που φαίνονται και να υπολογίσει πόσα χρειάζονται για να γίνουν 100. Σε κάθε περίπτωση θα βρει ότι λείπουν 20 τετραγωνάκια, δηλαδή  $\frac{20}{100}$  ή το 0,20 από το δίχτυ καταστράφηκαν.



## Δραστηριότητες με ντόμινο

Τα ντόμινο έχουν παρουσιαστεί στο Επίπεδο 1. Οι δραστηριότητες που ακολουθούν στα παρακάτω φύλλα εργασίας δίνουν την ευκαιρία στα παιδιά να αναπτύξουν στρατηγικές, να σκεφτούν πολλές λύσεις και να κάνουν συνδυασμούς.

Στη **σελίδα 68** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει 16 κομμάτια από το ντόμινό του και να τα τοποθετήσει ανά 4 στα 4 σπιτάκια. Σε κάθε τετράγωνο το άθροισμα από τις βούλες σε κάθε πλευρά του τετραγώνου πρέπει να είναι ίσο με τον αριθμό που είναι στο κέντρο του τετραγώνου (σπιτιού). Τα παιδιά μπορούν να εργαστούν ανά δύο ή σε ομάδα των τεσσάρων και να καταστρώσουν τη στρατηγική τους. Εάν δυσκολευτούν, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει κάποια ιδέα που θα βοηθήσει. Μια ιδέα θα μπορούσε να είναι να παρατηρήσουν τα παιδιά πώς τοποθετούνται τα κομμάτια σε κάθε πλευρά του τετραγώνου και να διαπιστώσουν ότι σε κάθε πλευρά εμφανίζονται 3 αριθμοί. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει σε ένα πρώτο συμπέρασμα ότι χρειάζονται τριάδες αριθμών που το άθροισμά τους να κάνει για παράδειγμα 10, 11, 12 και 13 (ανάλογο με το τετράγωνο). Με αυτή την ιδέα φτιάχνει την πρώτη τριάδα, που όπως διαπιστώνει ότι για το πρώτο τετράγωνο δεν μπορεί να ξεκινάει με το (0, 1), το (0, 2), το (0, 3) και το (1, 2) γιατί δεν υπάρχει κομμάτι με 9, 8 και 7 στο ένα του τετράγωνο. Οπότε, επιλέγει, για παράδειγμα, στην αριστερή πλευρά του πρώτου τετραγώνου να βάλει με τη σειρά το κομμάτι (2, 3) και το κομμάτι (5, 2) έτσι ώστε  $2 + 3 + 5 = 10$  και συνεχίζει (3, 1) έτσι ώστε  $5 + 2 + 3 = 10$  και (6, 2) έτσι ώστε  $3 + 1 + 6 = 10$ , κ.ο.κ. Υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί που μπορούν να δώσουν το ζητούμενο. Τα παιδιά μπορούν να εφαρμόσουν δοκιμή και πλάνη μετά την πρώτη πλευρά. Ακόμη μπορούν να καταλήξουν σε κάποια στρατηγική πιο δομημένη, δηλαδή να ξεκινούν κάθε φορά με έναν από τους συνδυασμούς (0, 4), (0, 5) και (0, 6) και να προχωρούν σε συνδυασμούς με (6,...), (5,...), (4,...), κ.λπ.

Στη **σελίδα 69** το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει κομμάτια του ντόμινο για να φτιάξει μαγικά τετράγωνα (το άθροισμα από τις βουλές των ντόμινο σε κάθε οριζόντια, κατακόρυφη και διαγώνια τριάδα πρέπει να είναι το ίδιο και ίσο με το δοσμένο). Στο φύλλο εργασίας υπάρχουν 2 μαγικά τετράγωνα, ένα του 12 και ένα του 18 και σε κάποιο άλλο φύλλο που θα του δώσει ο εκπαιδευτικός το παιδί πρέπει να φτιάξει τα μαγικά τετράγωνα του 15 και του 21. Μια πρώτη παρατήρηση που θα γίνει είναι ότι κάθε τετράγωνο είναι  $3 \times 3$ , δηλαδή τρεις γραμμές και τρεις στήλες, άρα 9 κομμάτια ντόμινο. Ακόμη θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει ότι όλα τα μαγικά τετράγωνα έχουν άθροισμα αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 3. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει στα παιδιά άλλοτε να εξηγούν τον τρόπο σκέψης τους προφορικά και άλλοτε να τον καταγράφουν ή να τον σχεδιάζουν.

Στη **σελίδα 70** είναι σχεδιασμένος ένας ήλιος με 8 ακτίνες. Υπάρχουν 4 ακτίνες των τριών κομματιών ντόμινο και 4 των τεσσάρων. Το παιδί καλείται να τοποθετήσει κομμάτια ντόμινο έτσι ώστε οι βούλες να έχουν άθροισμα κάθε φορά 21. Μια ιδέα θα ήταν να σκεφτεί το παιδί ότι θα πρέπει να βρει 4 4άδες και 4 3άδες αριθμών που το άθροισμά τους κάθε φορά να είναι 21 και



κατόπιν να βρει ποια θα είναι αυτά τα κομμάτια που θα πληρούν αυτές τις προϋποθέσεις. Υπάρχουν διάφορες στρατηγικές γι' αυτήν την ιδέα. Μπορεί να εφαρμόσει δοκιμή και πλάνη. Μπορεί να αρχίσει με τα κομμάτια του 1 δηλαδή (1, 2), (1, 3), (1, 4), κ.λπ. τα οποία είτε τα βάζει στη σειρά είτε τα βάζει κυκλικά, κατόπιν του 2, κ.ο.κ. κάνοντας κάθε φορά τις απαραίτητες αλλαγές για να επιτύχει το άθροισμα 21. Οι διαφορετικές λύσεις μπορεί να αναρτηθούν. Για καλύτερο αισθητικό αποτέλεσμα τα παιδιά μπορούν να χρωματίσουν με ίδια χρώματα τα ίδια κομμάτια ή τα κομμάτια με το ίδιο άθροισμα από βούλες, κ.ο.κ.



## Δραστηριότητες με ράβδους του Cuisenaire (μέρος Β)

Στο δεύτερο επίπεδο υπάρχουν 4 επιπλέον φύλλα εργασίας με χρήση των ράβδων του Cuisenaire.

Στη **σελίδα 71** υπάρχουν δύο δραστηριότητες με τις ράβδους και το σχηματισμό (χτίσιμο) με αυτές μιας σκάλας των αριθμών από 1 έως 10 που τα σκαλιά ανεβαίνουν ανά 1 και μιας σκάλας των αριθμών από 2 έως 10 που τα σκαλιά ανεβαίνουν ανά 2. Το παιδί καλείται και στις δύο περιπτώσεις να κάνει τη σκάλα διπλάσια σε ύψος με δύο τρόπους χρησιμοποιώντας κυβάρια ή ράβδους του Cuisenaire. Ίσως χρειαστεί να συζητηθεί με τις ομάδες των παιδιών το πώς ερμηνεύουν την έκφραση "διπλάσια σε ύψος", η οποία εμπεριέχει το συνδυασμό δύο εννοιών. Είναι πιθανόν το παιδί να παρακάμψει τις ράβδους και χρησιμοποιήσει απευθείας τη σχηματική αναπαράσταση. Σε κάθε περίπτωση το παιδί, τόσο στην ομάδα όσο και μόνος θα, πρέπει να είναι σε θέση να αιτιολογήσει τις λύσεις του.

Στη **σελίδα 72** οι ράβδοι χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της γεωμετρίας. Τα παιδιά καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις ράβδους για να κατασκευάσουν τρίγωνο και τετράγωνο με διαφορετικούς τρόπους. Με κυβάρια ζητείται να φτιάξουν έναν ελεύθερο δικό τους πύργο με μοναδικό περιορισμό να έχει 5 πατώματα. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες δίνουν ένα βαθμό ελευθερίας στα παιδιά για διαφορετικές επιλογές και λύσεις. Δηλαδή, μπορεί χρησιμοποιώντας διαφορετικές ράβδους να φτιάξει διαφορετικά είδη τριγώνων. Χωρίς να αναφέρει απαραίτητα ο εκπαιδευτικός το θεώρημα της 'τριγωνικής ανισότητας' μπορεί να συζητήσει με τα παιδιά γιατί όλοι οι συνδυασμοί ράβδων δεν δίνουν πάντα τρίγωνο. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει και δικές του δραστηριότητες στα παιδιά με άλλα σχήματα με τη χρήση των ράβδων, όπως για παράδειγμα, κατασκευή ορθογωνίου ή/και πλάγιου παραλληλόγραμμου ή/και τραπεζίου, τετραπλεύρου, κ.λπ.

Στη **σελίδα 73** δίνεται ένας πίνακας 10 x 10 με σημειωμένους κάποιους αριθμούς από το 1 έως το 100. Τα παιδιά καλούνται να εντοπίσουν συγκεκριμένους αριθμούς που θα τους βρουν αποκωδικοποιώντας τις λεκτικές φράσεις που δίνονται μέσα στα τρίγωνα, και κατόπιν να συμπληρώσουν τους αριθμούς που δεν είναι σημειωμένοι στον πίνακα. Στην προσπάθεια της αποκωδικοποίησης για την εύρεση του αποτελέσματος μπορεί να βοηθήσουν οι ράβδοι.

Οι δραστηριότητες στη **σελίδα 74** αναφέρονται στο κόστος και τη μέτρησή του κόστους σε λεπτά. Ως πλαίσιο για την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων χρησιμοποιείται ένα εργαστήριο παιχνιδιών. Συνδυασμοί από ράβδους αντιστοιχούν σε παιχνίδια και το κόστος του κάθε παιχνιδιού υπολογίζεται αντιστοιχίζοντας ένα κυβάκι με ένα λεπτό ή δύο λεπτά κατά περίπτωση. Η τελευταία δραστηριότητα είναι ανοιχτή και τα παιδιά μπορούν να φτιάξουν το δικό τους παιχνίδι σεβόμενοι ωστόσο τον περιορισμό του κόστους του παιχνιδιού στα 85 λεπτά. Οι διάφορες ομάδες μπορούν να δοκιμάσουν περισσότερους από έναν συνδυασμούς.

## Προβλήματα

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω φύλλα εργασίας εμπεριέχουν περισσότερα από ένα ερωτήματα. Για την απάντηση των ερωτημάτων αξιοποιείται άλλοτε η εικόνα, άλλοτε πίνακες, άλλοτε υλικά και άλλοτε όλα αυτά μαζί, καθώς εκεί αναζητούνται και βρίσκονται τα δεδομένα του προβλήματος. Οι απαντήσεις είναι προτάσεις που καταλήγουν τα παιδιά αφού κατανοήσουν πού θα τις βρουν χειριζόμενα τα δεδομένα και εκτελώντας τις κατάλληλες πράξεις.

Στη **σελίδα 75** η εικόνα παρουσιάζει 12 παιδιά από διάφορες χώρες της Ευρώπης που έχουν πάει στην κατασκήνωση. Κάθε παιδί έχει το όνομά του, τη χώρα προέλευσης και την αντίστοιχη σημαία. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να καλέσει τα παιδιά να μιλήσουν για την εικόνα και να αναδείξουν διάφορες πληροφορίες που προσφέρει κάνοντας και τις απαραίτητες συνδέσεις. Πιθανόν μέσα από τη συζήτηση να προκύψουν αβίαστα και απαντήσεις των 5 ερωτημάτων χωρίς αυτά να έχουν ακόμη εξεταστεί. Οι απαντήσεις στα ερωτήματα είναι συγκεκριμένες.

Θα χρειαστεί ένας χάρτης της Ευρώπης για να εντοπίσουν τα παιδιά τις χώρες. Ίσως, καλύτερα, ο εκπαιδευτικός να έχει αντίγραφο του χάρτη για κάθε δυάδα ή ομάδα ώστε να τοποθετήσουν τα ονόματα των παιδιών στις αντίστοιχες χώρες χρησιμοποιώντας διαφορετικό χρώμα για τα αγόρια και τα κορίτσια (απάντηση στην ερώτηση 1). Η συζήτηση μπορεί να περιλαμβάνει θέματα όπως ομιλούμενης γλώσσας στις διαφορετικές χώρες, για παράδειγμα ο Βάσος (Κύπρος) και ο Νικόλας (Ελλάδα) μιλούν Ελληνικά (απάντηση στην ερώτηση 4), γειτονικών λαών, για παράδειγμα η Ελλάδα (Νικόλας), η Κύπρος (Βάσος), η Τουρκία (Αϊσέ), κ.λπ., (απάντηση στην ερώτηση 2), πολιτιστικών επιρροών, για παράδειγμα διατροφικές συνήθειες Γερμανών και Αυστριακών, κ.λπ. Οι απαντήσεις μπορούν να μπουν σε έναν μικρό πίνακα και όλη η δραστηριότητα -φύλλα εργασίας, χάρτης, απαντήσεις, πίνακας-μπορεί να τοιχοκολληθεί στην τάξη.

Στη **σελίδα 76** υπάρχει μια εικόνα που απεικονίζει 2 λεωφορεία με επιβάτες, 3 αυτοκίνητα και το μέρος ενός τέταρτου αυτοκινήτου και 1 μοτοσικλέτα. Η εικόνα κι εδώ χρησιμοποιείται ως πηγή πληροφοριών που θα αξιοποιηθούν για να απαντηθούν τα 5 ερωτήματα. Οι τέσσερις πρώτες ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν με παρατήρηση και απαρίθμηση. Η πέμπτη ερώτηση στηρίζεται στη διαχείριση δεδομένων που σχετίζονται με την εικόνα αλλά παρατίθενται σε ένα πίνακα. Τα παιδιά πρέπει να αποκωδικοποιήσουν τον πίνακα, για παράδειγμα "τι γράφει η πρώτη στήλη, πόσες είναι οι στάσεις, πόσοι ανέβηκαν και πόσοι κατέβηκαν στην πρώτη στάση, άρα..." και να κάνουν τους υπολογισμούς που χρειάζονται. Τα πρώτα 4 ερωτήματα μπορούν να τα απαντήσουν τα παιδιά συνεργαζόμενοι ανά δύο, αλλά πιθανόν να χρειαστεί το 5ο ερώτημα να το χειριστεί ο εκπαιδευτικός με όλη την τάξη.

Η **σελίδα 77** περιλαμβάνει έναν λαβύρινθο με αριθμούς και το παιδί πρέπει να χαράξει μια διαδρομή έτσι ώστε να πηγαίνει στον αριθμό που είναι κατά 6 μεγαλύτερος από τον προηγούμενο. Η διαδρομή είναι 17, 23, 29, 35, -εδώ υπάρχουν δύο θέσεις με 41 και το παιδί πρέπει να δει ότι αν επιλέξει αυτόν που είναι δεξιά του 35 δεν θα μπορεί να βρει το 47, άρα διαλέγει το 41 προς τα κάτω, 47, 53, 59, 65, 71, 77, 83, 89, 95, έξοδος. Το κάθε παιδί μπορεί να εργαστεί μόνο του στο φύλλο εργασίας του. Αν χρειαστεί, μπορεί να χρησιμοποιήσει κυβάρια για να βρίσκει κάθε φορά τον  $n+6$ . Πιθανόν να παρατηρήσει ότι το τελευταίο ψηφίο των αριθμών είναι με τη σειρά 7, 3, 9, 5, 1, 7, κ.ο.κ.

Στις **σελίδες 78 και 79** εξετάζεται η ικανότητα των παιδιών να προσθέτουν τρεις μονοψήφιους αριθμούς  $\leq 6$ . Οι αριθμοί προέρχονται από υποτιθέμενες ρίψεις τριών ζαριών από δύο παίκτες. Τα παιδιά πρέπει να γράψουν κάτω από κάθε ζαριά του κάθε παίκτη το άθροισμα των τριών ζαριών που καλείται σκορ. Ο εκπαιδευτικός παρατηρεί πώς κάνουν τα παιδιά την πρόσθεση. Χρειάζεται να μετρούν τις βούλες μία-μία κάνοντας απλή απαρίθμηση; Ξεκινούν από έναν αριθμό και μετά προσθέτουν σε αυτόν τις υπόλοιπες βούλες μία-μία ή προσθέτουν απευθείας με διαισθητική εφαρμογή της προσεταιριστικής ιδιότητας  $(\chi + \psi) + \omega$ ; Ο εκπαιδευτικός παρακινεί τα παιδιά να ανταλλάξουν ιδέες πάνω σε αυτό το θέμα και προσπαθεί να ενισχύσει την τελευταία μέθοδο. Εάν θέλουν τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν κυβάρια. Για να απαντήσει στην πρώτη ερώτηση το παιδί πρέπει να υπολογίσει το άθροισμα όλων των σκορ τόσο του πρώτου όσο και του δεύτερου παίκτη και κατόπιν να βρει ποιος κέρδισε, ποιος είχε δηλαδή το μεγαλύτερο σκορ. Τα παιδιά έχουν να προσθέσουν 10 προσθετέους. Ο εκπαιδευτικός προκαλεί συζήτηση για να δει τι τεχνικές σκέφτονται να εφαρμόσουν τα παιδιά. Θα βάλουν τους αριθμούς κάθετα και πώς, θα βάλουν τους αριθμούς οριζόντια εφαρμόζοντας την προσεταιριστική ιδιότητα, θα φτιάξουν ομάδες ίδιων αριθμών (όλα τα 12 μαζί, όλα τα 11, κ.ο.κ.), θα προσθέσουν δυάδες, τριάδες, κ.λπ. αριθμών; Είναι πιθανόν να προχωρήσουν τη συζήτηση για το ποιος από τους παραπάνω τρόπους είναι ο πιο εργονομικός. Βρίσκουν ότι θα νικήσει ο πρώτος παίκτης.

Η δεύτερη ερώτηση είναι πιο απαιτητική σε μαθηματική σκέψη. Τα παιδιά πρέπει να βρουν με ποιο τρόπο θα μπορούσε να κερδίσει ο άλλος, ο δεύτερος παίκτης. Τα παιδιά συζητούν ανά δύο για να αποφασίσουν τον τρόπο που δεν είναι μοναδικός. Μπορούν να γίνουν διάφορες αλλαγές στα επί μέρους σκορ του δεύτερου παίκτη. Μπορεί τα παιδιά να βρουν πρώτα ότι η διαφορά των δύο συνολικών σκορ είναι 12 και να αρχίσουν να βάζουν σε διάφορες ζαριές μεγαλύτερους αριθμούς ώστε να υπερκαλυφθεί η διαφορά. Μπορούν να βάλουν μία παραπάνω βούλα στις 11 από τις 12 ζαριές και 2, 3,... περισσότερες βούλες στη 12η ζαριά ώστε η διαφορά να γίνει 13, 14, κ.ο.κ. και να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης. Μπορεί κάποιο παιδί να σκεφτεί και να προτείνει την ελάττωση του συνολικού σκορ του 1ου παίκτη. Ο εκπαιδευτικός συζητά και αυτή τη λύση με τα παιδιά.

Στην τρίτη ερώτηση το παιδί καλείται να χρησιμοποιήσει τα τρία ζάρια και να παίξει με ένα συμμαθητή του. Στο φύλλο εργασίας υπάρχει ένας πίνακας παρόμοιος με τον πίνακα της προηγούμενης σελίδας, δηλαδή δέκα θέσεων, όπου τα δύο παιδιά-παίκτες σημειώνουν τα αποτελέσματά τους κάθε φορά που ρίχνουν τα ζάρια. Το σκορ συμπληρώνεται με απεικόνιση των ζαριών και ακριβώς κάτω από κάθε απεικόνιση το άθροισμα των τριών αριθμών. Τα δύο παιδιά-συμμαίκτης πρέπει να γράψουν τα αποτελέσματα και να σκεφτούν πώς θα χειριστούν το παιχνίδι ώστε τη μια φορά να κερδίσει ο ένας και την άλλη ο άλλος. Πιθανόν να παίξουν 7-8 φορές το

παιγνίδι, να προσθέσουν τα επί μέρους σκορ και να καταγράψουν τις εναλλακτικές λύσεις σε ένα ξεχωριστό φύλλο για να μπορούν να κάνουν τις συγκρίσεις και να αποφασίσουν ποιες λύσεις θαβάλουν τελικά στο φύλλο εργασίας.

Η τέταρτη ερώτηση αναφέρεται στο ίδιο παιχνίδι με τα ζάρια που το παίζουν πάλι δύο παίκτες. Ο πίνακας αυτή τη φορά περιλαμβάνει για τον κάθε παίκτη τέσσερις θέσεις για τέσσερις τριπλές ζαριές και μία για το τελικό σκορ. Από τις θέσεις αυτές για τον μεν πρώτο παίκτη είναι συμπληρωμένες η 1η και 3η θέσεις και το τελικό σκορ για το δε δεύτερο παίκτη είναι συμπληρωμένες η 2η και 4η θέσεις και το τελικό σκορ. Το παιδί καλείται να συμπληρώσει το σκορ στις κενές θέσεις έτσι ώστε το άθροισμα να είναι το δοσμένο τελικό σκορ. Για παράδειγμα, ο πρώτος παίκτης έχει  $13 + \chi + 8 + \psi = 40$ , δηλαδή  $21 + \chi + \psi = 40$  ή  $\chi + \psi = 19$ . Το ότι ψάχνουμε δύο αριθμούς με άθροισμα 19 (Διοφαντική εξίσωση) μπορεί να το βρουν τα παιδιά με διάφορους τρόπους, τους οποίους καλό είναι να τους συζητήσει ο εκπαιδευτικός και να τους καταγράψει. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να ζητήσει από τα παιδιά να καταγράψουν όλα τα αθροίσματα και κατόπιν να οργανώσει συζήτηση για να αναδειχθούν τα αθροίσματα εκείνα που δεν είναι δεκτές λύσεις, καθώς και τον λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό. Για παράδειγμα, η λύση 0 και 19 δεν είναι δυνατή για δύο λόγους: ο μέγιστος αριθμός που μπορεί να φέρει μια ζαριά είναι  $3 \times 6 = 18$  και από την άλλη δεν υπάρχει ζάρι με 0. Επιπλέον και οι λύσεις 1, 18 και 2, 17 αποκλείονται για το δεύτερο λόγο. Άρα γίνονται δεκτές 7 λύσεις. Παρόμοια εργαζόμαστε και για τον δεύτερο παίκτη.

Στις **σελίδες 80** και **81** η δραστηριότητα αφορά στη θεσιακή αξία των ψηφίων. Αρχικά δίνονται στο παιδί δύο ψηφία, το 5 και το 2 σε δύο πλαίσια στο φύλλο εργασίας και του ζητείται να φτιάξει διψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα. Ο περιορισμός που τίθεται από την αρχή είναι να χρησιμοποιηθεί κάθε φορά ένα ψηφίο. Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει και χειραπτικό υλικό, δηλαδή καρτέλες των αριθμών και να δει ποιες θέσεις μπορεί να έχουν. Διαπιστώνει ότι μπορεί να φτιάξει δύο διψήφιους αριθμούς, το 25 και το 52 και να απαντήσει στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, οι οποίες αφορούν σε συγκρίσεις των δύο αριθμών (ο 52 έχει 5 δεκάδες και 2 μονάδες και ο 25 2 δεκάδες και 5 μονάδες). Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός ζητά από τα παιδιά να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Κατόπιν δίνονται 3 ψηφία, το 4, το 2 και το 3 και ζητείται από το παιδί να φτιάξει διψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας για τον κάθε αριθμό μια φορά το κάθε ψηφίο. Πάλι μπορεί να χρησιμοποιήσουν τα παιδιά κάρτες για να κάνουν τους συνδυασμούς. Οι αριθμοί είναι έξι: 23, 24, 32, 34, 42 και 43. Τα παιδιά μπορούν να ανακαλύψουν διάφορους τρόπους-στρατηγικές για τη δημιουργία των αριθμών και ο εκπαιδευτικός τους αναδεικνύει και τους συζητά στην τάξη. Μπορεί κάποιοι να γράψουν τους ίδιους αριθμούς δύο φορές και να βρεθεί μια στρατηγική, όπως για παράδειγμα διατεταγμένα ζεύγη, που να βοηθά στην αποφυγή της επανάληψης. Εάν ο εκπαιδευτικός θέλει να προχωρήσει και σε κάποια μορφή εμπέδωση και πιθανόν γενίκευση, ανάλογα και με το επίπεδο της τάξης, μπορεί να δώσει σε ένα άλλο φύλλο εργασίας 4 αριθμούς για να βρεθούν οι συνδυασμοί εφαρμόζοντας μια συγκεκριμένη στρατηγική που θα αποφασίσουν όλοι μαζί. Κατόπιν να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα για το πώς μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός των διψήφιων αριθμών που δημιουργούνται με ένα συγκεκριμένο αριθμό δοσμένων ψηφίων  $[n(n-1)]$ , όπου  $n$  ο αριθμός των δοσμένων ψηφίων].

Στη δεύτερη άσκηση το παιδί καλείται να φτιάξει όσους τριψήφιους αριθμούς μπορεί χρησιμοποιώντας 3 ψηφία, το 5, το 2 και το 1, πάλι με τον ίδιο περιορισμό, δηλαδή χρησιμοποιώντας για τον κάθε αριθμό μια φορά το κάθε ψηφίο. Τα παιδιά μπορούν να εργαστούν ανά δύο

και να συζητήσουν εάν θα χρησιμοποιήσουν την εμπειρία τους από την προηγούμενη άσκηση τροποποιώντας την ανάλογα για να την προσαρμόσουν στα νέα δεδομένα ή εάν θα αναπτύξουν καινούριες στρατηγικές. Μπορεί να σκεφτούν να πάρουν το κάθε ψηφίο με τα άλλα δύο φτιάχνοντας 2 αριθμούς ανάλογα με τη σειρά που θα πάρουν τα δύο ψηφία, όπως για παράδειγμα το 5 με τους 2 και 1 φτιάχνει τους αριθμούς 521 και 512. Επειδή τα ψηφία είναι 3 έχουμε  $3 \times 2 = 6$  αριθμούς (521, 512, 215, 251, 125, 152). Κατόπιν πρέπει να απαντήσουν σε τέσσερις ερωτήσεις που αφορούν σε συγκρίσεις μεταξύ των αριθμών. Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός ζητά από τα παιδιά αιτιολόγηση των απαντήσεών τους.

Κατόπιν δίνονται 4 αριθμοί που μάλιστα είναι συνεχόμενοι (4, 3, 2 και 1) και το παιδί καλείται να φτιάξει όσους περισσότερους τριψήφιους αριθμούς μπορεί και να απαντήσει στις σχετικές ερωτήσεις της άσκησης 2. Το παιδί μπορεί να εφαρμόσει την εμπειρία του από την προηγούμενη άσκηση και να σκεφτεί ότι αν πάρει τον κάθε αριθμό με τους άλλους 3 θα φτιάξει 6 τριψήφιους αριθμούς και επειδή τα ψηφία είναι 4 θα έχουμε  $4 \times 6 = 24$  αριθμούς. Αυτή η στρατηγική θα τον βοηθήσει για να μην επαναλάβει έναν αριθμό περισσότερες φορές. Τα παιδιά καταγράφουν όλους τους συνδυασμούς πιθανόν σε ένα πινακίδιο σε ένα καινούριο φύλλο εργασίας, όπου απαντούν και στις ερωτήσεις. Η τελευταία ερώτηση "τι παρατηρείς;" είναι μια ανοιχτή ερώτηση όπου τα παιδιά συζητούν σε δυάδες ή ομάδες για να απαντήσουν. Ο εκπαιδευτικός γράφει τις παρατηρήσεις των παιδιών στον πίνακα και τις θέτει σε διαπραγμάτευση ώστε να αποφασίσουν ποιες θα καταγράψουν τελικά στα φύλλα εργασίας. Οι παρατηρήσεις πιθανόν να αφορούν στις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς που δημιουργήθηκαν που μπορεί για παράδειγμα να είναι ότι ο αριθμός με το μεγαλύτερο ψηφίο στη θέση των εκατοντάδων το αμέσως μεγαλύτερο στη θέση των δεκάδων, κ.ο.κ. είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ή ότι οι τρεις πρώτοι αριθμοί, όπως είναι τοποθετημένοι στο φύλλο εργασίας, σχηματίζουν τον μεγαλύτερο τριψήφιο αριθμό.

Στη **σελίδα 82** οι δραστηριότητες αφορούν σε μετρήσεις μεγεθών και συγκεκριμένα μήκους, βάρους και χρόνου. Δίνονται 16 διαφορετικές μονάδες μέτρησης για τα τρία παραπάνω μεγέθη και ένα πίνακας με τρεις στήλες, μία για το κάθε μέγεθος (μήκος, βάρος και χρόνος), όπου το παιδί θα γράψει τις αντίστοιχες μονάδες. Υπάρχει περίπτωση τα παιδιά να έχουν άγνωστες λέξεις, όπως για παράδειγμα τις λέξεις 'τόνοι', 'χιλιόγραμμα', 'τέταρτα' κ.ά. Ο εκπαιδευτικός αναζητά εξήγηση από τα παιδιά, υποδεικνύει εξήγηση από το λεξικό, προσπαθεί να δώσει παραδείγματα από την καθημερινή ζωή (ένας τόνος σίδηρο, ένα τέταρτο της ώρας, κ.λπ.) ή υποδεικνύει στα παιδιά να συμπληρώσουν αυτά που γνωρίζουν και κατόπιν να δουν τι μένει για να το αναζητήσουν. Εάν τα παιδιά δυσκολεύονται να γράψουν, μπορούν να φωτοτυπήσουν και να κόψουν τις καρτέλες των λέξεων και να τις επικολλήσουν, αφού συζητήσουν, στην κατάλληλη στήλη. Κατόπιν διαλέγουν 6 μονάδες μέτρησης από τον πίνακα και γράφουν για κάθε μία από αυτές κάτι που μπορούν να μετρήσουν. Εάν ο εκπαιδευτικός διαπιστώσει ότι χρειάζεται να διευκολύνει την κατάσταση, μπορεί να ενθαρρύνει τα παιδιά να σκεφτούν ή να υποδείξει ο ίδιος ένα πλαίσιο από όπου θα αντλήσουν παραδείγματα. Για παράδειγμα, αν επιλέξουν τα ψώνια στο σουπερμάρκετ μπορεί να βάλουν ότι με τα 'κιλά' θα μπορούσαν να μετρήσουν ζάχαρη ή όσπρια, με τα 'γραμμάρια' βούτυρο, με τα 'λεπτά' χρόνο παραμονής στο κατάστημα, με τα 'λίτρα' νερό ή αναψυκτικά, κ.λπ. Ωστόσο η άσκηση μπορεί να λυθεί και εκτός πλαισίου με ανταλλαγές ιδεών από τα παιδιά. Τα παιδιά συνεργάζονται ανά δύο ή σε ομάδες για αυτές τις δραστηριότητες, καθώς απαιτούν απ' ό,τι φαίνεται συνδέσεις ρεαλιστικών καταστάσεων και μαθηματικών μέσα από τη χρήση ειδικών γλωσσικών τύπων.

Η **σελίδα 83** περιλαμβάνει ασκήσεις που αναφέρονται στη σειροθέτηση αριθμών από το 0 έως το 99 και τη θεσιακή αξία. Δίνονται δύο πίνακες, ο ένας 3 x 3 και ο άλλος 3 x 4. Σε κάποια από τα κελιά των πινάκων είναι τοποθετημένες κάρτες τυχαίων διψήφιων αριθμών. Το παιδί καλείται να συμπληρώσει και τα υπόλοιπα κελιά με αριθμούς που θα σκεφτεί το ίδιο, κατόπιν να φωτοτυπήσει και να κόψει τις κάρτες και να τοποθετήσει τους αριθμούς στη σειρά είτε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο είτε από το μεγαλύτερο στο μικρότερο πάνω στο θρανίο του ή σε ένα άλλο φύλλο εργασίας. Δύο σημεία πρέπει να προσεχθούν σε αυτή την άσκηση: από τη μια ότι οι δεκάδες καθορίζουν το μέγεθος ενός διψήφιου αριθμού και από την άλλη ότι όταν έχω ίδιες δεκάδες παίζουν ρόλο οι μονάδες. Τέλος, το κάθε παιδί καλείται να φτιάξει έναν παρόμοιο πίνακα με όποιες διαστάσεις θέλει και να τον δώσει στο συμμαθητή του για να εργαστεί όπως προηγουμένως. Μέσα από αυτή την άσκηση το παιδί περνά σε μια μεταγνωστική διαδικασία και ίσως χρειαστεί τη βοήθεια του εκπαιδευτικού.

Τα γενέθλια είναι μια δραστηριότητα που εκτείνεται σε δύο φύλλα εργασίας στις **σελίδες 84** και **85**. Τα γενέθλια του Ιλχάν είναι ένα πλαίσιο οικείο στα παιδιά για να ενδιαφερθούν και να δώσουν κάποιες λύσεις στο πρόβλημα. Το πρόβλημα είναι μέσα σε μια ιστορία που χρειάζεται να διαβαστεί καλά, να συζητηθεί με εκπαιδευτικό και παιδιά και τα δεδομένα να αναδειχθούν και να σημειωθούν στον πίνακα. Η συνεργασία εκπαιδευτικού και παιδιών είναι στενή μέχρι τα παιδιά να κατανοήσουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος. Τα παιδιά θα ήταν καλό να το πάρουν το θέμα προσωπικά και να βοηθήσουν τον Ιλχάν να χειριστεί καλά τα χρήματά του. Ένας τρόπος γι αυτό είναι να διαλέξουν και να δώσουν ονόματα στους φίλους του Ιλχάν. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέλει να αφήσει τα παιδιά ελεύθερους να αποφασίσουν πώς θα λύσουν το πρόβλημα, αλλά θα πρέπει να καταγράψουν τη στρατηγική τους για να μπορούν και να την παρουσιάσουν στους συμμαθητές τους. Θα χρειαστεί να υπάρχουν επιπλέον σελίδες όπου τα παιδιά θα γράψουν τις δικές τους στρατηγικές ή θα οργανώσουν τα δεδομένα σύμφωνα με την υπόδειξη του εκπαιδευτικού, εάν για κάποιο λόγο τα παιδιά χρειάζονται κάποιο μπούσουλα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να στρέψει την προσοχή των παιδιών στα παρακάτω δεδομένα ώστε να τα οργανώσουν και να δουν πώς θα τα αξιοποιήσουν για να απαντήσουν στα ερωτήματα:

- α) Χρειάζεται να ομαδοποιηθούν οι διαφορετικές συσκευασίες για τα ίδια πράγματα που θα προσφέρει ο Ιλχάν στους φίλους του. Για παράδειγμα, υπάρχουν 6 διαφορετικά είδη χυμών με διαφορετική τιμή το καθένα που χρειάζεται να μπουν σε μια λίστα με σειρά από, πιθανόν, το πιο φθηνό στο πιο ακριβό (30 λ., 40 λ., 45 λ., 55 λ., 60 λ., 65 λ.) Το ίδιο μπορεί να γίνει και με τις πίτες και τα γλυκά, ενώ για το πιάτο και το ποτήρι υπάρχει μόνο μια τιμή.
- β) Χρειάζεται να βρεθεί κοινή μονάδα μέτρησης για τις τιμές τόσο των αντικειμένων που αφορούν στο φαγητό όσο και των δώρων που θέλει να κάνει ο Ιλχάν στους φίλους του που είναι εκφρασμένες σε διαφορετικές μονάδες, άλλες σε λεπτά (ακέραιοι αριθμοί) και άλλες σε ευρώ (δεκαδικοί αριθμοί). Το θέμα αυτό μπορεί να συζητηθεί στην τάξη και να αποφασίσουν τα παιδιά μια κοινή μονάδα που θα χρησιμοποιήσουν.
- γ) Χρειάζεται να φτιαχτούν 4 κατάλογοι των αντικειμένων που ο Ιλχάν θα αγοράσει για κάθε έναν από τους τέσσερις φίλους του. Τα παιδιά γράφουν τον κατάλογο σύμφωνα με το μοντέλο που δίνεται στο φύλλο εργασίας προσθέτοντας στην τελευταία σειρά και το δώρο που ο Ιλχάν θα χαρίσει στον κάθε φίλο. Το δώρο μπορεί να μην είναι το ίδιο για όλους, τα παιδιά

συζητούν και αποφασίζουν και πιθανόν να σκεφτούν ότι το δώρο μπορεί να είναι τέτοιο που να ταιριάζει στα ενδιαφέροντα του κάθε φίλου.

Τα παιδιά εργάζονται σε ομάδες και συμπληρώνουν τον κατάλογο με τα είδη για τον κάθε φίλο του Ιλχάν βάζοντας δίπλα σε κάθε είδος την τιμή του. Εκτελούν τις προσθέσεις για τον κάθε φίλο και κατόπιν βρίσκουν το άθροισμα για όλους τους φίλους. Το συγκρίνουν με τα 85 ευρώ που διαθέτει ο Ιλχάν και διαπιστώνουν εάν τα χρήματα φτάνουν. Όποιες τιμές κι αν διαλέξουν τα παιδιά το ποσό φθάνει.

Ερώτηση που μπορεί να προκύψει είναι εάν ο ίδιος ο Ιλχάν θα φάει ή όχι. Επίσης εάν φτάνουν τα χρήματα και για έναν πέμπτο φίλο ή για πόσους το πολύ φίλους; Η ποιο θα μπορούσε να είναι το μικρότερο και ποιο το μεγαλύτερο κόστος των γενεθλίων; Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει τα ερωτήματα για διερεύνηση και απάντηση στις ομάδες.

Στη **σελίδα 86** το μαθηματικό περιεχόμενο του προβλήματος αφορά στα κλάσματα και τα ποσοστά, όπως αυτά παρουσιάζονται στο ρεαλιστικό πλαίσιο των εκπτώσεων. Στο φύλλο εργασίας δίνονται 5 πουκάμισα με τις αρχικές τους τιμές και η μείωση που υφίστανται οι τιμές τους λόγω των εκπτώσεων είναι εκφρασμένη για 3 πουκάμισα σε κλάσματα και για 2 πουκάμισα σε ποσοστά. Το πρόβλημα έχει τρεις δυάδες ερωτήσεων. Στην πρώτη δυάδα το παιδί καλείται να βρει ποιο πουκάμισο έχει την 'καλύτερη προσφορά' και ποιο την 'χειρότερη προσφορά' μετά την έκπτωση. Το παιδί θα πρέπει να 'αποκωδικοποιήσει' τις παραπάνω εκφράσεις για να μπορέσει να αποδώσει νόημα και να σκεφτεί ποιες πράξεις θα κάνει για να απαντήσει στα ερωτήματα. Ο εκπαιδευτικός προτρέπει τα παιδιά να συζητήσουν στην ομάδα τι νόημα αποδίδουν στα ερωτήματα αυτά και πώς σκέφτονται να τα απαντήσουν.

Οι ιδέες των ομάδων συζητούνται. Για την απάντηση δεν είναι απαραίτητο να συγκριθούν οι αρχικές και οι τελικές τιμές. Η σύγκριση των μειώσεων τροποποιημένων ώστε να είναι όλες κλάσματα ή όλες ποσοστά αρκεί. Ωστόσο είναι φυσικό τα παιδιά να θέλουν να προχωρήσουν σε πράξεις για να βρουν τις τελικές τιμές. Πιθανόν να μη χρειάζεται να τους πείσει εκείνη τη χρονική στιγμή ο εκπαιδευτικός ότι αυτό δεν είναι απαραίτητο, εξάλλου οι πράξεις θα χρειαστούν για την απάντηση των υπολοίπων ερωτημάτων. Εάν χρειαστεί, ο εκπαιδευτικός βοηθά για την οργάνωση των δεδομένων. Υποδεικνύει τη δημιουργία ενός πίνακα, όπου αριθμούνται και καταγράφονται τα 5 πουκάμισα με τις αρχικές τους τιμές, τη μείωση και την τελική τιμή.

Πουκάμισο	Αρχική τιμή	Μείωση	Υπολογισμός	Τελική τιμή
1				
2				

Η τοποθέτηση των δεδομένων στον πίνακα μπορεί να ξεκινήσει με το ακριβότερο αρχικά πουκάμισο και να τελειώσει με το αρχικά φθηνότερο. Τα παιδιά επιλέγουν τους δικούς τους τρόπους για να κάνουν τους υπολογισμούς και να συμπληρώσουν τον πίνακα. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν αριθμομηχανή τσέπης για τους υπολογισμούς, ωστόσο χρειάζεται να γνωρίζουν πώς θα την χρησιμοποιήσουν στη συγκεκριμένη περίπτωση και πώς μπορούν να ελέγξουν το αποτέλεσμα που εμφανίζεται στην οθόνη. Θα αναγνωρίσουν ότι η καλύτερη προσφορά είναι για

το πουκάμισο των 60 ευρώ, ενώ η χειρότερη είναι για το πουκάμισο των 45 και θα χρειαστεί να αιτιολογήσουν την άποψή τους (η τελική τιμή έχει τη μεγαλύτερη/μικρότερη διαφορά με την τελική, η τιμή μίκρυνε περισσότερο/λιγότερο από όλες, κ.λπ.). Εάν τα παιδιά δεν δουν την ανάγκη, ο εκπαιδευτικός υποδεικνύει τη μετατροπή των μειώσεων ώστε να είναι εκφρασμένες με τον ίδιο μαθηματικό τρόπο (κλάσματα ή ποσοστά).

Ο πίνακας βοηθά να απαντηθεί και η δεύτερη δυάδα ερωτήσεων. Το πιο ακριβό πουκάμισο πριν την έκπτωση έχει ήδη εντοπιστεί, εάν ο πίνακας έχει συμπληρωθεί με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω και το ίδιο πουκάμισο διαπιστώνουν τα παιδιά ότι είναι το πιο ακριβό πουκάμισο και μετά την έκπτωση.

Η πρώτη ερώτηση της τρίτης δυάδας ερωτήσεων απαντάται πάλι με τη χρήση του πίνακα και τα παιδιά επιλέγουν διάφορους συνδυασμούς δύο πουκαμίσιων, υπολογίζουν τα χρήματα που χρειάζονται και απαντούν στο ερώτημα. Για το τελευταίο ερώτημα τα παιδιά συνεργάζονται σε ομάδες για να ζωγραφίσουν πουκάμισα ή πιθανόν κάποιο άλλο ένδυμα -οπωσδήποτε όμως ένα είδος- και να φτιάξουν ταμπέλες με εκπτώσεις που θα είναι αρκετά μεγάλες αφού θα έχουν 'μεταφράσει' την έκφραση "πουκάμισα που έχουν τρελαθεί" που βρίσκεται στο φύλλο εργασίας.

Οι **σελίδες 87** και **88** αναφέρονται στη μέτρηση και το χειρισμό του χρόνου μέσα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Το παιδί καλείται να σχεδιάσει την έξοδο του Χακάν και των φίλων του που θέλουν να πάνε σινεμά με το λεωφορείο. Στο φύλλο εργασίας δίνονται μια σειρά πληροφορίες σε μονάδες μέτρησης χρόνου: δρομολόγια αυτοκινήτων, ωράριο προβολής του έργου, απόσταση σπιτιού-στάσης σε λεπτά, διαδρομή λεωφορείου σε λεπτά. Το παιδί πρέπει να λάβει υπόψιν του αυτές τις πληροφορίες προκειμένου να κάνει ένα ρεαλιστικό σχεδιασμό και να απαντήσει στις ερωτήσεις.

Ο εκπαιδευτικός συζητά με τα παιδιά για το πώς σκέπτονται να χειριστούν τα δεδομένα. Οι ιδέες συζητούνται και εάν ο εκπαιδευτικός βλέπει ότι καταλήγουν κάπου, αφήνει τις ομάδες να εργαστούν ελεύθερα. Εάν χρειάζονται τη βοήθειά του, μπορεί να υποδείξει τη δημιουργία πινάκων. Τα παιδιά εργάζονται σε ομάδες για να καταστρώσουν έναν πίνακα των δρομολογίων των λεωφορείων και ένα πίνακα των κινήσεων του Χακάν και των φίλων του από τη στιγμή που ξεκινούν από το σπίτι μέχρι τη στιγμή που φθάνουν στο σινεμά. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν ρολόι αναλογικό ή ψηφιακό για να συμπληρώσουν τους πίνακες. Ο πίνακας των δρομολογίων μπορεί να είναι πολύ απλός:

7.00	7.20	7.40	8.00	...							
------	------	------	------	-----	--	--	--	--	--	--	--

Μόλις τα παιδιά αντιληφθούν ότι κάθε ώρα υπάρχει δρομολόγιο μπορούν να αρχίσουν την καταγραφή από τις 15.00 και μετά που μοιάζει να είναι μια ρεαλιστική προσέγγιση.

Ο πίνακας των κινήσεων μπορεί να έχει διάφορες μορφές. Παρακάτω υπάρχουν δύο παραδείγματα:



	Αναχώρηση	Άφιξη
Σπίτι-στάση λεωφορείου		
Στάση λεωφορείου-σινεμά		

Αναχώρηση		Άφιξη	
Σπίτι		Στάση λεωφορείου	
Στάση λεωφορείου		Σινεμά	

Για την απάντηση του πρώτου ερωτήματος η συμπλήρωση του πίνακα θα πρέπει να γίνει αντίστροφα καθώς η έναρξη του έργου είναι εκείνη που καθορίζει την αναχώρηση από το σπίτι. Οι ομάδες μπορεί να δώσουν διαφορετικές λύσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε κοινωνικοπολιτιστικούς λόγους, όπως για παράδειγμα στο ότι θα λάβουν υπόψιν κάποιο χρόνο για την έκδοση των εισιτηρίων ή κάποια πιθανή καθυστέρηση του λεωφορείου που δεν αναφέρονται στο φύλλο εργασίας. Η αντιμετώπιση τέτοιων ιδεών θα βοηθήσει για την απάντηση του δεύτερου ερωτήματος στο δεύτερο φύλλο εργασίας. Η ώρα αναχώρησης θα πρέπει να μετακινηθεί νωρίτερα -το πόσο θα το αποφασίσουν οι ομάδες, ίσως κατά ένα ή δύο δρομολόγια- για να υπάρχει χρόνος να αγοράσει ο Χακάν και οι φίλοι του τα σάντουιτς.

Η τελευταία ερώτηση μπορεί να απαντηθεί με μια απλή μετατόπιση της ώρας αναχώρησης που τα παιδιά βρήκαν για το πρώτο ερώτημα κατά 1 ώρα και 30 λεπτά αφού αυτή είναι η διαφορά ανάμεσα στο 17.00 (παλιά έναρξη) και το 18.30 (νέα έναρξη). Ωστόσο ο εκπαιδευτικός αφήνει τα παιδιά να εργαστούν μόνοι, να αναπτύξουν τη δική τους στρατηγική και να την παρουσιάσουν εξηγώντας την.

Στα δύο φύλλα εργασίας στις **σελίδες 89** και **90** τα παιδιά καλούνται να ασχοληθούν με άλλο ένα πρόβλημα χειρισμού δεδομένων μέσα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Στο φύλλο εργασίας παρουσιάζονται εικόνες φαγητών, η ονομασία τους και η τιμή τους οργανωμένα ανά είδος (πίτσες, κρεατικά, κ.λπ.). Βάσει ενός υποθετικού σεναρίου το παιδί πηγαίνει για φαγητό στην ταβέρνα με τη μαμά του και το μπαμπά του και πρέπει να συνθέσει γεύματα και για τους τρεις, ουσιαστικά να οργανώσει μια παραγγελία. Σε αυτή του την ενέργεια λαμβάνει υπόψιν του ότι το ποσό που διαθέτει ο μπαμπάς του είναι 122 ευρώ. Κατόπιν πρέπει να βρει πόσα χρήματα θα πληρώσει ο μπαμπάς του για όλους και πόσα ρέστα θα πάρει.

Ο εκπαιδευτικός αρχικά συζητά το θέμα με τα παιδιά, επισημαίνουν τα ερωτήματα και τα γράφουν στον πίνακα, πιθανόν αριθμώντας τα εάν αποφασίσουν ότι τους διευκολύνει στο να μη χάσουν τους στόχους:

1. Να φτιάξεις ένα γεύμα...
2. Πόσα χρήματα θα πληρώσει...
3. Πόσα ρέστα...

Η φύση του προβλήματος είναι τέτοια που ευνοεί την εργασία των παιδιών σε ομάδες.

Χρειάζεται συζήτηση και συνεργασία στην ομάδα για να επιλεγούν τα φαγητά, να γραφτούν σε ένα πίνακα (ερώτηση 1), να υπολογιστούν το άθροισμα (ερώτηση 2) και τα ρέστα (ερώτηση 3). Μπορούν να καταρτιστούν περισσότερες από μια παραγγελίες, πιθανόν μία για κάθε παιδί της ομάδας. Ένα δείγμα πίνακα μπορεί να είναι το παρακάτω. Τα φαγητά είναι ενδεικτικά. Τα παιδιά συμπληρώνουν τον πίνακα σύμφωνα με τις διατροφικές συνήθειες της οικογένειάς τους, τις προτιμήσεις των μελών τους, την ποσότητα που αντέχουν να φάνε σε ένα γεύμα, κ.ο.κ.

Μαμά (όνομα)		Μπαμπάς (όνομα)		Παιδί (όνομα)	
Φαγητό...	τιμή	φαγητό	τιμή	φαγητό	τιμή
Σαλάτα...					
επιδόρπιο...					
σύνολο		σύνολο		σύνολο	

Τελικό σύνολο: σύνολο Μαμάς + σύνολο Μπαμπά + σύνολο Παιδιού =

Είναι δύσκολο να μην φτάσουν τα χρήματα για γεύματα που δεν θα ξεπερνούν ακόμη και τα τέσσερα πιάτα δεδομένου ότι δεν υπάρχει τιμή μεγαλύτερη από 9 ευρώ.

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας το παιδί πρέπει να επιλέξει γεύμα και για ένα φίλο του. Προσθέτει στον προηγούμενο πίνακα και μια στήλη για το φίλο του συμπληρώνοντάς την κατά τον ίδιο τρόπο. Κατόπιν βρίσκει πόσο θα πληρώσει ο πατέρας αυτή τη φορά προσθέτοντας στο προηγούμενο τελικό σύνολο το κόστος του γεύματος του φίλου. Εάν το συνολικό κόστος των γευμάτων των τεσσάρων συνδαιτυμόνων υπερβαίνει το ποσό των 122 ευρώ, τα παιδιά θα πρέπει να βρουν μια στρατηγική που να μειώνει το κόστος. Το φαγητό που θα αφαιρέσουν δεν θα έχει σχέση μόνο με την τιμή αλλά και με άλλους παράγοντες, όπως, για παράδειγμα, δεν μπορεί να μην πάρουν όλοι κύριο φαγητό, ενώ μπορεί κάποιος να μη θέλει επιδόρπιο, κ.ο.κ. Όλα αυτά είναι θέματα που τα συζητά και τα αποφασίζει η ομάδα. Οι προτάσεις της κάθε ομάδας για τα δύο ερωτήματα μπορεί να διακοσμήσουν την τάξη.

Η **σελίδα 91** ξεκινά με ένα ερώτημα που στοχεύει στο μαθηματικό αλφαριθμητισμό των παιδιών. Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο παραπέμπει στις αναλογίες και πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιείται ως στρατηγική σύγκρισης ανάμεσα σε διαφορετικές συσκευασίες του ίδιου προϊόντος. Το φαινόμενο αυτό είναι πολύ συνηθισμένο στην καθημερινή ζωή της σημερινής εποχής, όπως για παράδειγμα στις προσφορές διαφόρων προϊόντων στα σουπερμάρκετ. Στο φύλλο εργασίας παρουσιάζονται 5 διαφορετικές συσκευασίες-κουτιά μιας μάρκας οικολογικού χρώματος και πέντε διαφορετικές τιμές (1κιλό-8 ευρώ, 3 κιλά-15 ευρώ, 5 κιλά-22 ευρώ, 15 κιλά-47 ευρώ, 20 κιλά-52 ευρώ). Το παιδί καλείται να απαντήσει σε τέσσερα ερωτήματα.

Τα δύο πρώτα ερωτήματα είναι να βρει ποιο κουτί τού συμφέρει να αγοράσει και ποιο κουτί είναι πιο ακριβό. Για να μπορέσει το παιδί να απαντήσει σε αυτά τα ερωτήματα θα πρέπει να μπορεί να συγκρίνει τις συσκευασίες μεταξύ τους. Αλλά πώς μπορεί να γίνει αυτό όταν οι συ-

σκευασίες δεν αναγράφουν την τιμή του ενός κιλού αλλά περισσότερων; Τα παιδιά εργάζονται ανά δύο ή σε ομάδες για να σκεφτούν τι στρατηγική θα ακολουθήσουν. Ο εκπαιδευτικός βοηθά στις δυσκολίες. Ένας τρόπος είναι να διαιρέσουν την τιμή των κιλών με τον αριθμό των κιλών και να βρουν την τιμή του ενός κιλού (ευρώ/κιλό). Ένας άλλος τρόπος είναι να οδηγηθούν στην ίδια διαίρεση μέσα από την δημιουργία ενός πίνακα των δεδομένων και των ζητούμενων.

Κιλά	ευρώ
3	15
1	X

Κάτω από κάθε κουτί μπορούν να γράψουν την τιμή του ενός κιλού (8, 5, 4,5, 3,1, 2,6). Διαπιστώνουν ότι συμφέρει η 5η συσκευασία ενώ το πιο ακριβό κουτί είναι η 1η συσκευασία.

Υπάρχει περίπτωση τα παιδιά να κάνουν τους υπολογισμούς νοερά, όπως για παράδειγμα, “επειδή 3 φορές το 5 κάνει 15, η τιμή του κιλού για το δεύτερο κουτί είναι 5 ευρώ”, ενώ για το τρίτο κουτί όπου 4 κιλά κοστίζουν 22 ευρώ η τιμή του κιλού είναι 4,5 ευρώ “επειδή 4 φορές το 5 κάνει 20 και 4 φορές το 0,5 κάνει 2”, ή διαισθητικά, όπως για παράδειγμα, “βλέπω ότι 15 κιλά 47 ευρώ είναι καλύτερα ή συμφέρει καλύτερα από 3 κιλά 15 ευρώ”. Στη δεύτερη περίπτωση θα χρειαστεί να αιτιολογηθεί η διαισθητική απάντηση. Ο εκπαιδευτικός βοηθά διακριτικά τα παιδιά να διατυπώσουν τα επιχειρήματά τους προσπαθώντας να μην αλλοιώνει τη γνησιότητα της ιδέας του παιδιού.

Το δεύτερο ερώτημα αφορά την τροποποίηση της τιμής του 4ου κουτιού των 15 κιλών λόγω προσφοράς από το μαγαζάτορα που αποφασίζει να το πουλήσει 35 ευρώ αντί για 47. Το παιδί καλείται να βρει πώς αυτή η τροποποίηση επηρεάζει τα αποτελέσματά του. Εάν κάνει διαίρεση του 15 με το 35, βρίσκει ότι η τιμή του κιλού τώρα γίνεται 2,3 ευρώ από 3,1 που ήταν. Άρα το κουτί που συμφέρει να αγοράσει δεν είναι πλέον το 5ο αλλά το 4ο. Σε κάθε περίπτωση ακριβότερο παραμένει το 1ο κουτί. Εάν δεν κάνει διαίρεση και προσπαθήσει να βρει τη λύση νοερά ή προσεγγιστικά, μπορεί να σκεφτεί ότι το 35 είναι κάτι παραπάνω από το 30 που είναι διπλάσιο του 30, άρα η τιμή του κιλού είναι 2 και κάτι πολύ λίγο ευρώ. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι δύσκολη η σύγκριση με το 5ο κουτί (2,6 ευρώ), άρα θα πρέπει η τιμή του 4ου κουτιού να βρεθεί ακριβώς.

Ωστόσο τα ερωτήματα αυτά τοποθετούνται σε μια άλλη βάση, εάν απέναντί τους μπει το ζήτημα της ανάγκης. Εάν δεν υπάρχει ανάγκη να αγοραστούν 15 ή 20 κιλά, αλλά για παράδειγμα μόνο 5, τότε μήπως η σύγκριση περιορίζεται ανάμεσα στα τρία πρώτα κουτιά; Τέλος, το παιδί παροτρύνεται να κάνει κι άλλες παρόμοιες έρευνες για άλλα προϊόντα. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να φέρει συσκευασίες στην τάξη ή να οδηγήσει τα παιδιά στο κοντινό σουπερμάρκετ ή μινιμάρκετ για να κάνουν αυτή την εργασία. Τα προς εξέταση αγαθά μπορεί να έχουν προαποφασιστεί στην τάξη ή να αποφασιστούν στον τόπο της εργασίας.

Στη **σελίδα 92** υπάρχουν 6 προβλήματα που λύνονται βασικά με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να προμηθεύσει τα παιδιά με φύλλα εργασίας, όπου θα κάνουν τους υπολογισμούς για να δώσουν απαντήσεις στα ερωτήματα των προβλημάτων.

Τα παιδιά μπορούν να συνεργαστούν και κατόπιν να συζητήσουν στην τάξη πώς σκέφτηκαν για να λύσουν το κάθε πρόβλημα. Σε κάθε πρόβλημα μπορεί να προηγηθεί της λύσης παραίνεση του εκπαιδευτικού να μαντέψουν τα παιδιά το αποτέλεσμα, να το βρουν περίπου λέγοντας πώς σκέφτηκαν και να επιβεβαιώνουν μετά με την πράξη ή και την αριθμομηχανή. Μέσα από την επίλυση των προβλημάτων μας ενδιαφέρει να δούμε και τον τρόπο σκέψης του παιδιού αλλά και τον τρόπο που εκτελεί μια πράξη, δηλαδή την ολοκληρωμένη μαθηματική εξέλιξή του.

*1ο Πρόβλημα:* Το παιδί θα πρέπει να κάνει τον πολλαπλασιασμό 79 κτύποι επί 60 λεπτά της ώρας, δηλαδή διψήφιος επί διψήφιο. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει πρώτα από τα παιδιά να κάνουν την πράξη νοερά με προσέγγιση, δηλαδή το 79 είναι σχεδόν 80 άρα έχω τον πολλαπλασιασμό 80 επί 60 που κάνει 4800 κτύποι την ώρα περίπου ή νοερά με ακρίβεια, δηλαδή 4800-60 λόγω του 79, άρα 4740 κτύποι την ώρα. Ένα βασικό ζήτημα που μπορεί να προκύψει στην αρχή είναι εάν τα παιδιά θα καταλάβουν ότι πρέπει να κάνουν πολλαπλασιασμό. Σε αυτή την περίπτωση ο εκπαιδευτικός οδηγεί τα παιδιά σε μια σειρά από σκέψεις, το 1 λεπτό 79 κτύποι, τα 2 λεπτά..., τα 3 λεπτά..., κ.ο.κ. ώστε να καταλήξουν στον πολλαπλασιασμό. Με αριθμομηχανή επιβεβαιώνονται τα αποτελέσματα, εάν αυτό κριθεί αναγκαίο. Το αποτέλεσμα μπορεί να σχολιαστεί από τα παιδιά στην τάξη, για παράδειγμα οι κτύποι είναι πολλοί, τι άλλο θα μπορούσε να έχει τόσους πολλούς κτύπους το λεπτό, κ.λπ.

*2ο Πρόβλημα:* Το παιδί θα πρέπει να κάνει τον πολλαπλασιασμό 179 χλμ. επί 24 ώρες, δηλαδή τριψήφιος επί διψήφιο, και να επιβεβαιώσει το αποτέλεσμα με αριθμομηχανή, οδηγούμενος από το σκεπτικό 1 ώρα 179 χλμ., 2 ώρες  $2 \times 179$  χλμ., κ.ο.κ. Ο προσεγγιστικός υπολογισμός μπορεί να είναι 200 επί 20 που δίνει μια καλή προσέγγιση που μπορεί να ελέγχει και το τελικό αποτέλεσμα. Κι εδώ το αποτέλεσμα μπορεί να σχολιαστεί από τα παιδιά στην τάξη, ένα κανονικό αυτοκίνητο σαν της οικογένειας σε πόσο χρόνο κάνει αυτά τα χιλιόμετρα, εάν το επάγγελμα του πατέρα σχετίζεται με οδήγηση (ταξί, λεωφορείο αστικό κ.λπ.) ή ταξίδια εκτός πόλης (αντιπρόσωπος κ.λπ.) σε πόσο χρόνο, κ.λπ.

*3ο Πρόβλημα:* Το παιδί θα πρέπει να κάνει τον πολλαπλασιασμό 134 επί 281 (37654), δηλαδή τριψήφιος επί τριψήφιο. Εδώ η προσέγγιση μπορεί να είναι 200 επί 200 που δίνει έναν αριθμό (40000) πολύ κοντά στο αποτέλεσμα.

*4ο Πρόβλημα:* Το παιδί θα πρέπει να βρει το γινόμενο  $52 \times 7 \times 7$  ή να βρει πόσες ώρες εργάζεται την εβδομάδα ( $7 \times 7$ ) και το αποτέλεσμα να το πολλαπλασιάσει με το 52 ή να βρει πόσα χρήματα παίρνει την ημέρα ( $52 \times 7$ ) και το αποτέλεσμα να το πολλαπλασιάσει με τις 7 ημέρες. Ουσιαστικά εφαρμόζει την προσεταιριστική ιδιότητα στο παραπάνω γινόμενο. Η προσέγγιση και εδώ μπορεί να είναι το γινόμενο 50 επί 50 με βάση τον δεύτερο τρόπο που δίνει ένα αποτέλεσμα (2500) πολύ κοντά στο πραγματικό (2548).

*5ο Πρόβλημα:* Το ερώτημα του προβλήματος είναι ένα ερώτημα που μπορεί να εξάψει τη φαντασία των παιδιών. Τα παιδιά προσπαθούν αρχικά να μαντέψουν. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κάνει ερωτήσεις του τύπου "Θα είναι περισσότερες ή λιγότερες από 1000;", "Θα είναι της τάξης των εκατοντάδων, χιλιάδων, δεκάδων χιλιάδων, κ.λπ.". Για την εύρεση του αποτελέσματος τα παιδιά εργάζονται με διάφορους τρόπους. Θα χρειαστεί να τους εξηγήσουν γι αυτό μπορεί να τους καταγράψουν. Εάν σκεφτούν απευθείας ότι είναι ένα πολλαπλασιασμός  $24 \times 365$  και δεν θέλουν πρώτα να βρουν τις ώρες ενός μήνα και μετά να πολλαπλασιάσουν με το 12 ή να το βρουν με άλλον τρόπο, μπορεί να σκεφτούν την προσέγγιση  $20 \times 400$  που είναι κοντά στο 8760 τουλάχισ-

στον σε ό,τι αφορά την τάξη μεγέθους (8000). Αυτό βοηθά και στην απάντηση των ερωτήσεων του εκπαιδευτικού.

*6ο Πρόβλημα:* Το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα του 5ου προβλήματος και να το πολλαπλασιάσει με το 60. Για γρήγορη προσέγγιση πολλαπλασιάζει το 8000 με το 60 (480000) για να βρει την τάξη μεγέθους. Επιβεβαιώνει με την αριθμομηχανή και τον ακριβή πολλαπλασιασμό. Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό και ο εκπαιδευτικός μπορεί να προκαλέσει συζήτηση στην τάξη για το πώς βλέπουν τα παιδιά αυτό το αποτέλεσμα. Πάνω από 500 χιλιάδες ώρες το χρόνο άραγε πώς τις ζούμε, τι κάνουμε, πώς τις αξιοποιούμε, κ.λπ.;

Οι **σελίδες 93** και **94** περιλαμβάνουν 10 προβλήματα που λύνονται με τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να προμηθεύσει τα παιδιά με φύλλα εργασίας, όπου θα κάνουν τους υπολογισμούς για να δώσουν απαντήσεις στα ερωτήματα των προβλημάτων. Τα παιδιά μπορούν να συνεργαστούν και κατόπιν να συζητήσουν στην τάξη πώς σκέφτηκαν για να λύσουν το κάθε πρόβλημα. Σε κάθε πρόβλημα μπορεί να προηγείται της λύσης η άσκηση του να μαντέψουν τα παιδιά το αποτέλεσμα, να το βρουν περίπου λέγοντας πώς σκέφτηκαν και να επιβεβαιώνουν μετά με την πράξη ή και την αριθμομηχανή. Σε κάποια από τα προβλήματα θα βοηθούσε τα παιδιά η χρήση υλικών ή και η απεικόνιση του προβλήματος. Μέσα από την επίλυση των προβλημάτων μας ενδιαφέρει να δούμε και τον τρόπο σκέψης του παιδιού αλλά και τον τρόπο που εκτελεί μια πράξη, δηλαδή την ολοκληρωμένη μαθηματική εξέλιξή του.

*1ο Πρόβλημα:* Η απάντηση στην ερώτηση μπορεί να δοθεί με μια πρόσθεση των τριών ποσών που ξόδεψε η Άννα  $12,31 + 4,39 + 22,94$ . Ένα ζητούμενο είναι τα παιδιά να σκεφτούν και να αποφασίσουν ότι πρέπει να κάνουν πρόσθεση. Το δεύτερο ζητούμενο είναι το πώς θα την κάνουν. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τα παιδιά να βρουν το αποτέλεσμα κατά προσέγγιση, για παράδειγμα 12 και 4 κάνουν 16 και 23 κάνουν 39, περίπου 40 ευρώ ξόδεψε η Άννα. Κατόπιν προσθέτουν οριζόντια ή κάθετα τους δεκαδικούς. Μπορεί να χρειαστεί να δουν το θέμα της τοποθέτησης των αριθμών στην κάθετη πρόσθεση. Λογικός μπούσουλας για το αποτέλεσμα θα είναι η προσέγγιση των 40 ευρώ που μπορεί να κατευθύνει τα παιδιά στο πώς να κάνουν αυτοδιόρθωση, εάν χρειαστεί.

*2ο Πρόβλημα:* Για τη λύση του προβλήματος αυτού ο εκπαιδευτικός μπορεί να συστήσει στα παιδιά να κάνουν ένα σχέδιο για να απεικονίσουν την κίνηση του αυτοκινήτου και έτσι να αντιληφθούν ότι πρέπει να κάνουν αφαίρεση του 0,12 από το 3,69. Ωστόσο κάποια παιδιά μπορεί να κάνουν πρόσθεση με την έννοια να βρουν το συμπλήρωμα του 0,12 ως το 3,69. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να οργανώσει μια συζήτηση για το τι σημαίνει 3,69 και 0,12 χλμ. Πόσα μέτρα είναι; Μπορούν να σκεφτούν γνωστές τους ανάλογες αποστάσεις;

*3ο Πρόβλημα:* Τα παιδιά μπορούν να καταστρώσουν ένα σχέδιο ή έναν πίνακα όπου θα γράψουν τα χρήματα που ξόδεψε η μαμά, τα χρήματα που διαθέτει και αυτά που θα πάρει ρέστα. Τα παιδιά μπορούν να μαντέψουν το αποτέλεσμα νοερά. Περίπου 11 στο μπακάλη και περίπου 13 στον κρεοπώλη κάνουν 24 άρα περίπου 25 θα πάρει ρέστα από τα 50 ευρώ. Κατόπιν εκτελούν την πρόσθεση και την αφαίρεση δεκαδικών. Εάν γίνουν λάθη στις πράξεις, τα παιδιά μπορούν να οδηγηθούν σε αυτοδιόρθωση συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά της προσέγγισης.

*4ο Πρόβλημα:* Η απάντηση δίνεται με μια αφαίρεση των 1,6 ευρώ από τα 3. Η αφαίρεση μπορεί να γίνει και νοερά με βάση το συμπλήρωμα, δηλαδή 1,4 ευρώ χρειάζονται ως το 3 ή το 1,6 είναι σχεδόν 1,5 άρα άλλα τόσα μπορεί να ξοδέψει ο τουρίστας.

*5ο Πρόβλημα:* Το παιδί θα πρέπει να σχεδιάσει τη λύση σε ένα πίνακα γράφοντας τη σειρά των σκέψεών του που θα οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Θα προσθέσει τα τρία ποσά που αφορούν σε έξοδα του εργάτη, δηλαδή  $45,69 + 54,73 + 75,5$ , θα τα αφαιρέσει από το βδομαδιακό και τη διαφορά θα την πολλαπλασιάσει με το 3 για να βρει πόσα χρήματα θα εξοικονομήσει. Για μια πρώτη προσέγγιση τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν περίπου  $50 + 50$  κάνει 100 για φόρο και φαγητό και 80 το ενοίκιο όλα μαζί τα έξοδα περίπου 180. Άρα από τα 270 του περισσεύουν περίπου 100 τη βδομάδα, άρα 300 ευρώ στις 3 εβδομάδες, που είναι πολύ κοντά στο πραγματικό ποσό των 278,34 ευρώ. Εάν τα παιδιά σκεφτούν να κάνουν τρεις αφαιρέσεις αφαιρώντας ένα ένα τα ποσά των εξόδων στην αρχή από το 268,70 ευρώ και κατόπιν από τα διαδοχικά υπόλοιπα, η προσέγγιση δεν βοηθάει. Τα παιδιά μπορεί να παρατηρήσουν ότι σε 3 εβδομάδες εργασίας ο εργάτης εξοικονομεί περίπου το ένα από τα τρία βδομαδιακά και να υποθέσουν τι γίνεται σε ένα χρόνο. Ακόμη μπορούν να σκεφτούν τι θα άλλαζε στο αποτέλεσμα, εάν ο εργάτης υπολόγιζε και άλλα έξοδά του, όπως καθημερινά μικροέξοδα, μια έξοδο την εβδομάδα, κ.λπ.

*6ο Πρόβλημα:* Ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποδείξει στα παιδιά να χωρίσουν την πρώτη πρόταση του προβλήματος στην οποία βρίσκονται τα δεδομένα σε μικρότερες προτάσεις για να τις αποκωδικοποιήσουν. Τα παιδιά επισημαίνουν τις εκφράσεις 'τα μισά χρήματα' και το 'ένα τρίτο όσων έμειναν' και καταγράφουν τα αποτελέσματα της αποκωδικοποίησης. Πόσα είναι τα μισά του 55,80, πώς τα βρίσκω; Τα παιδιά εφαρμόζουν διάφορους αλγορίθμους και βρίσκουν ότι είναι 27,9 ευρώ. Αυτά δίνει η Αθηνά στην Ελένη και μένουν 27,9 ευρώ. Τι σημαίνει ένα τρίτο όσων έμειναν, πώς βρίσκω το  $\frac{1}{3}$  του 27,9; Τα παιδιά εφαρμόζουν διάφορους αλγορίθμους και βρίσκουν ότι είναι 9,3 ευρώ αυτά που η Αθηνά δίνει στην Καίτη. Τώρα είναι έτοιμοι να απαντήσουν στο ερώτημα είτε με μια πρόσθεση και μια αφαίρεση είτε με δύο διαδοχικές αφαιρέσεις που δεν είναι τίποτα άλλο από τους δύο τρόπους που μπορεί να εφαρμόσει κανείς για να βρει την τιμή της παράστασης [Αθηνά - (Ελένη + Καίτη)].

*7ο Πρόβλημα:* Στο πρόβλημα αυτό το σημείο που πρέπει να προσεχθεί είναι ότι τα ποσά δίνονται με διαφορετικές υποδιαίρεσεις της μονάδας μέτρησης, δηλαδή σε εκατοστά και χιλιοστά. Πιθανόν η πρώτη αντίδραση κάποιων παιδιών να είναι ότι δεν γίνεται να κόψουμε 197 χιλ. από το καλώδιο γιατί είναι πολλά. Για να κάνει το παιδί την αφαίρεση και να δώσει την απάντηση θα πρέπει να μετατρέψει τα χιλιοστά σε εκατοστά ή αντίθετα. Μπορεί σε αυτό να βοηθηθεί από τις ισοδυναμίες που βρίσκονται στο δεξί άκρο της σελίδας. Πριν γίνει αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μέτρο ή καλύτερα το δίμετρο για να γίνει αναπαράσταση των 197 χιλιοστών και των 38,7 εκ. στον τοίχο ή το πάτωμα ή όπου αλλού και αισθητοποίηση από τα παιδιά των δύο μεγεθών ώστε να μπορούν να τα συγκρίνουν. Διαπιστώνουν ότι το καλώδιο θα κοπεί στη μέση περίπου.

*8ο Πρόβλημα:* Και σε αυτό το πρόβλημα το σημείο που πρέπει να προσεχθεί είναι ότι τα ποσά δίνονται με διαφορετικές υποδιαίρεσεις της μονάδας μέτρησης, δηλαδή σε γραμμάρια και κιλά, γεγονός που μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στα παιδιά. Μπορεί σε αυτό να βοηθηθεί από τις ισοδυναμίες που βρίσκονται στο δεξί άκρο της σελίδας. Της λύσης του προβλήματος μπορεί να προηγηθούν ζυγίσεις διαφόρων αντικειμένων με και χωρίς περιεχόμενο, ποτήρι με και χωρίς νερό, κουτί με και χωρίς κιμωλίες κ.λπ. με χρήση ζυγαριάς στην τάξη, ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν τι σημαίνουν τα δεδομένα του προβλήματος, ζύγιση άδειου μπουκαλιού, ζύγιση μπουκαλιού γεμάτου με νερό. Τα παιδιά καταγράφουν μόνοι τους τα αποτελέσματα των παραπάνω ζυγίσεων και αντιλαμβάνονται στην πράξη την ανάγκη της χρήσης συγκεκριμένης υποδιαίρεσης

της μονάδας. Μάλλον θα χρησιμοποιήσουν γραμμάρια. Η αφαίρεση ενός μικρού δεκαδικού από έναν μεγάλο ακέραιο μπορεί να αποτελεί πρόκληση για κάποια παιδιά. Η τοποθέτηση των ποσών κάθετα με σωστό τρόπο θα υπαγορευτεί και από τον βαθμό που τα παιδιά έχουν κατανοήσει την τάξη μεγέθους στην οποία αναμένεται να κινείται το αποτέλεσμα, δηλαδή αν από το περίπου 1200 αφαιρώ περίπου 100 περιμένω ένα αποτέλεσμα περίπου 1100.

*9ο Πρόβλημα:* Το παιδί καλείται να οργανώσει τα δεδομένα του και τις πράξεις που πρέπει να κάνει για να απαντήσει στο ερώτημα. Και σε αυτό το πρόβλημα το σημείο που πρέπει να προσεχθεί είναι ότι τα ποσά δίνονται με διαφορετικές υποδιαιρέσεις της μονάδας μέτρησης, ευρώ και λεπτά. Θα μετατρέψει όλα τα ποσά σε ευρώ ή λεπτά. Μπορεί σε αυτό να βοηθηθεί από τις ισοδυναμίες που βρίσκονται στο δεξί άκρο της σελίδας. Η εικονική αναπαράσταση του προβλήματος μπορεί να βοηθήσει σε καλύτερη αντίληψη των δύσκολων σημείων του προβλήματος, για παράδειγμα τις πινέζες. Ο εκπαιδευτικός δίνει έμφαση και στον τρόπο σκέψης των παιδιών και στον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων. Το παιδί θα πρέπει να κάνει έναν πολλαπλασιασμό  $9 \times 163$  λεπτά για να βρει το κόστος όλων των 9 τετραδίων (1467 λεπτά) και έναν πολλαπλασιασμό  $13 \times 40$  λεπτά για να βρει το κόστος όλων των μολυβιών (520 λεπτά). Για τις πινέζες χρειάζεται να εργαστεί διαφορετικά. Οι 850 πινέζες θα πρέπει να τοποθετηθούν σε 17 κουτιά των 50 κατά την εικονική αναπαράσταση ώστε να βρει το παιδί ότι χρειάζεται να κάνει τον πολλαπλασιασμό  $17 \times 30$  για να βρει το κόστος των πινεζών (510 λεπτά). Το παιδί προσθέτει τα τρία γινόμενα και το άθροισμα το αφαιρεί από τα 25 ευρώ αφού τα μετατρέψει σε λεπτά (2500 λεπτά). Μπορεί να αποφασίσει να εκφράσει το τελικό αποτέλεσμα σε ευρώ διαιρώντας το με το 100. Μπορεί να επαναλάβει τις πράξεις με δεκαδικούς στην αριθμομηχανή και να συγκρίνει τα αποτελέσματα.

*10ο Πρόβλημα:* Τα παιδιά καλούνται να εκτελέσουν μια πρόσθεση με προσθετέους μήκη εκφρασμένα σε διαφορετικές υποδιαιρέσεις και πολλαπλάσια του μέτρου. Πριν εκτελέσουν την πρόσθεση συζητούν με τον εκπαιδευτικό για τις μετατροπές και αποφασίζουν μια κοινή έκφραση των ποσών. Εάν ο εκπαιδευτικός κρίνει, μπορεί να οδηγήσει τα παιδιά να αποφασίσουν διαφορετικές υποδιαιρέσεις για τις διαφορετικές ομάδες παιδιών. Μετά την εκτέλεση των πράξεων οι ομάδες γράφουν τα αποτελέσματα στον πίνακα με τις μονάδες μέτρησης και αυτά συγκρίνονται για να διαπιστώσουν ότι έχουν χρησιμοποιηθεί τα ίδια ψηφία ενώ αλλάζει η θέση της υποδιαστολής. Μπορεί να γίνει και τοποθέτηση από το μικρότερο αποτέλεσμα στο μεγαλύτερο και να γίνουν κι άλλες παρατηρήσεις από τα παιδιά.

## Τρίτο Επίπεδο



### Δραστηριότητες με πεντόμινο

Στη **σελίδα 5** υπάρχει μια εισαγωγική δραστηριότητα με τη χρήση των πεντόμινο. Αν και έχουν προηγηθεί στα δύο προηγούμενα επίπεδα δραστηριότητες με τη χρήση των πεντόμινο, θα μπορούσε η αρχική δραστηριότητα να χρησιμοποιηθεί για την γνωριμία και εξοικείωση των παιδιών με το υλικό που είτε δεν θυμούνται είτε δεν έχουν συναντήσει ξανά γιατί έχουν περάσει απευθείας στο επίπεδο 3. Το παιδί καλείται να γνωρίσει και να χρησιμοποιήσει το υλικό. Επιπλέον δίνονται και κάποια παραδείγματα όχι επιθυμητής χρήσης του υλικού για να αποφευχθούν τυχόν παρερμηνείες και αστοχίες στις δραστηριότητες που θα ακολουθήσουν. Τέλος, ζητείται από το παιδί να κατασκευάσει όλα τα διαφορετικά πεντόμινο (12 κομμάτια), να τα σχεδιάσει και να τα ζωγραφίσει στις επόμενες 2 σελίδες.

Η δραστηριότητα στη **σελίδα 6** (Η περίμετρος των πεντόμινο) έχει ως στόχο τον υπολογισμό της περιμέτρου των διαφορετικών πεντόμινο. Εισάγεται μια μονάδα μέτρησης που είναι η πλευρά του πεντόμινο και τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν και να καταγράψουν την περίμετρο των 12 διαφορετικών κομματιών πεντόμινο και να εντοπίσουν το κομμάτι με τη μικρότερη περίμετρο. Τα παιδιά διαπιστώνουν ότι οι περίμετροι που βρίσκουν είναι είτε 10 μονάδες είτε 12 μονάδες και επομένως δεν είναι δυνατόν να απαντήσουν στην ερώτηση με μοναδικό τρόπο.

Η δραστηριότητα της **σελίδας 7** όπως σε συνδυασμό με την επόμενη της **σελίδας 8** στοχεύει στο να ξεπεράσουν τα παιδιά μια συχνή παρανόησή τους ότι τα σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν έχουν και την ίδια περίμετρο και το αντίστροφο. Μέσα από την ενασχόλησή τους τα παιδιά θα αντιληφθούν ότι τα διαφορετικά κομμάτια πεντόμινο, μολονότι έχουν κατασκευαστεί με τα ίδια κομμάτια (5 τετράγωνα), δεν έχουν απαραίτητα και την ίδια περίμετρο. Στη σελίδα 7 τα παιδιά καλούνται να συγκρίνουν την περίμετρο δύο ακανόνιστων σχημάτων χωρίς να τη μετρήσουν και να μαντέψουν ποιο έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο. Ο εκπαιδευτικός προκαλεί τα παιδιά να πουν πώς σκέφτηκαν. Κατόπιν καλύπτουν το ένα σχήμα με 2 κομμάτια πεντόμινο, εφόσον έχει 10 τετράγωνα, και το άλλο με τρία κομμάτια, εφόσον έχει 15 τετράγωνα. Τα παιδιά καλούνται να μετρήσουν την περίμετρο του κάθε σχήματος και να την καταγράψουν (το πρώτο 16 μονάδες, το δεύτερο 18 μονάδες).



Η **σελίδα 8** περιλαμβάνει δύο δραστηριότητες που στηρίζονται στην ιδέα της δυναμικής των δυναμικών μετασχηματισμών των σχημάτων. Στην πρώτη το παιδί καλείται να επιλέξει κομμάτια πεντόμινο και να κατασκευάσει ένα σχήμα πάνω στον καμβά 4 x 6 του φύλλου εργασίας που να έχει περίμετρο 20 μονάδες. Το παιδί μπορεί να εφαρμόσει δοκιμή και πλάνη. Ωστόσο έχει ήδη την εμπειρία του δεύτερου σχήματος της σελίδας 7 που έχει περίμετρο 18 και μπορεί να στηρίξει την κατασκευή του σε αυτό. Για παράδειγμα, μπορεί να αρχίσει τις δοκιμές χρησιμοποιώντας τρία κομμάτια πεντόμινο. Το παιδί ζωγραφίζει την κατασκευή του στον καμβά-πλαίσιο. Υπάρχουν διάφορες λύσεις του προβλήματος που μπορεί να τις βρουν τα παιδιά και να τις συγκρίνουν μεταξύ τους.

Στη δεύτερη δραστηριότητα το παιδί καλείται να πάρει τρία κομμάτια πεντόμινο όμοια με αυτά που βρίσκονται στο κάτω μέρος του φύλλου εργασίας και να κατασκευάσει στον καμβά 9 x 6 της επόμενης σελίδας ένα σχήμα με περίμετρο 22 μονάδες. Και σε αυτή την περίπτωση το παιδί μπορεί να εφαρμόσει δοκιμή και πλάνη. Ο τρόπος που θα τοποθετήσει τα κομμάτια παίζει σημαντικό ρόλο. Τα παιδιά μπορούν να εργαστούν ανά δύο. Και στις δύο δραστηριότητες ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να υπολογίσουν και την περίμετρο των σχημάτων ώστε να συζητήσει και πάλι τη σχέση εμβαδού και περιμέτρου.

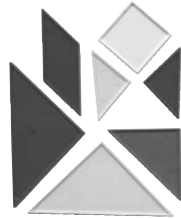
Στη **σελίδα 10** το παιδί καλείται να καλύψει τα δύο σχήματα με τα κατάλληλα κομμάτια πεντόμινο. Η ιδέα στην οποία στηρίζεται αυτή η δραστηριότητα είναι η σχέση εμβαδού και περιμέτρου. Μετά την εργασία τους τα παιδιά θα παρατηρήσουν ότι η περίμετρος και το εμβαδόν ενός σχήματος είναι διαφορετικά. Το παιδί παρατηρεί ότι το πρώτο σχήμα έχει 10 τετράγωνα, άρα θα χρειαστεί δύο κομμάτια, και το δεύτερο σχήμα 15 τετράγωνα, άρα θα χρειαστεί 3 κομμάτια. Μπορεί να κάνει διάφορους συνδυασμούς. Κατόπιν μετρά την περίμετρο του πρώτου και διαπιστώνει ότι είναι 16 μονάδες και του δεύτερου 18, ενώ τα εμβαδά είναι 10 και 15 τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα. Στο τέλος του φύλλου εργασίας το παιδί καλείται να συμπληρώσει την παρατήρηση ότι όλα τα κομμάτια πεντόμινο έχουν το ίδιο εμβαδόν (5 μονάδες).

Η **σελίδα 11** στηρίζεται στην ιδέα της μετάβασης από τις 2 διαστάσεις-επίπεδο στις τρεις-όγκο. Η διαδικασία της μετάβασης εμπεριέχει δυσκολίες για τα παιδιά του δημοτικού και σε αυτό θα βοηθήσει η χρήση του υλικού. Το παιδί μπορεί να φανταστεί και να μαντέψει ποια κομμάτια πεντόμινο μπορούν να γίνουν ανοιχτά κουτιά, δηλαδή 'παραλίγο' κύβοι με πέντε έδρες. Στη διαδικασία αυτή μπορεί να εμφανιστούν κριτήρια που το οδηγούν να πει ΝΑΙ ή ΟΧΙ, όπως για παράδειγμα ποιες ακμές είναι αντικριστές και πώς, κ.λπ. Για παράδειγμα, το κομμάτι σταυρός είναι φανερό ότι είναι ανοιχτό κουτί γιατί οι ακμές θα ενωθούν ανά δύο και το μεσαίο τετράγωνο θα είναι η βάση. Κατόπιν έχει στη διάθεσή του μια σειρά από τα 12 κομμάτια πεντόμινο από χαρτόνι για να δοκιμάσει για να επιβεβαιώσει τις υποθέσεις του. Τα αποτελέσματα τα σημειώνει στα σχετικά τετραγωνάκια στο φύλλο εργασίας. Από την πρώτη στήλη ΝΑΙ είναι το 1ο, 3ο, 4ο, 6ο ενώ από τη δεύτερη το 3ο, 4ο, 5ο και 6ο.

Η **σελίδα 12** περιλαμβάνει ένα μικρό 'τ' που είναι ένα κομμάτι πεντόμινο και ένα μεγάλο 'Τ' που κατασκευάζεται από 4 κομμάτια ντόμινο. Το παιδί καλείται να καλύψει και τα δύο με κομμάτια πεντόμινο, να μετρήσει τα εμβαδά τους (5 και 20 τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα) και τις περιμέτρους τους (12 και 24 μονάδες) και να τα καταγράψει στο φύλλο εργασίας. Ο εκπαιδευτικός καλεί το παιδί να κάνει συγκρίσεις ανάμεσα στα αποτελέσματά του. Το παιδί μπορεί να παρατηρήσει ότι ενώ το μεγάλο 'Τ' έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το μικρό 'τ', η περίμετρός του είναι διπλάσια. Επιπλέον θα μπορεί να παρατηρεί ότι ο λόγος εμβαδού περιμέτρου του μεγάλου

'Τ' ( $20/24 = 10/12$ ) είναι διπλάσιος του αντίστοιχου του μικρού 'τ' ( $5/12$ ). Επιπλέον θα μπορούσαν τα παιδιά να παρατηρήσουν ότι το μεγάλο Τ είναι πιο συμπαγές από το μικρό.

Στη **σελίδα 13** έχουμε πραγματικά προκλήσεις για τα παιδιά. Στις συγκεκριμένες εργασίες τα παιδιά δεν μπορούν να ταιριάξουν τα κομμάτια πεντόμινο μέσα στο κάθε σχήμα, επομένως δεν έχουν να καλύψουν με τα πεντόμινο μια δοσμένη επιφάνεια. Το σχήμα πάνω δεξιά έχει 60 τετράγωνα και άρα μπορεί να κατασκευαστεί με τα 12 κομμάτια πεντόμινο ( $12 \times 5 = 60$ ). Τα άλλα σχήματα έχουν μικρότερο αριθμό τετραγώνων.



### Δραστηριότητες με Τάνγκραμ

Στη **σελίδα 14** παρουσιάζονται τα επτά κομμάτια του Τάνγκραμ. Στο υλικό έχουμε ήδη αναφερθεί στο 1ο και 2ο επίπεδο. Στις δραστηριότητες που ακολουθούν με βάση το υλικό αυτό θα χρειαστεί να χρησιμοποιηθούν κομμάτια από περισσότερα από ένα σετ Τάνγκραμ. Αυτό εξασφαλίζεται με συνεργασία των παιδιών σε ομάδες. Τα παιδιά καλούνται να μελετήσουν και να πειραματιστούν με τα κομμάτια του Τάνγκραμ και να ανακαλύψουν τις ορθές γωνίες που υπάρχουν στα σχήματα αυτά. Αν τα παιδιά υπολογίσουν ότι έχουν 5 ορθογώνια τρίγωνα με 5 ορθές γωνίες συν οι 4 ορθές γωνίες του τετραγώνου θα βρουν ότι 9 είναι όλες οι ορθές γωνίες και των επτά σχημάτων. Ο εκπαιδευτικός καλεί τα παιδιά να συγκρίνουν τα σχήματα μεταξύ τους και να ανακαλύψουν ή να θυμηθούν εάν έχουν περάσει από το δεύτερο επίπεδο ότι 2 μικρά τρίγωνα ισοδυναμούν με ένα μεσαίο, δύο μεσαία με ένα μεγάλο και 4 μικρά τρίγωνα με ένα μεγάλο τρίγωνο, ενώ το τετράγωνο και το πλάγιο παραλληλόγραμμο σχηματίζονται από 2 μικρά τρίγωνα τοποθετημένα με διαφορετικό τρόπο.

Στη **σελίδα 15** τα παιδιά καλούνται να εκτιμήσουν ποιο από τα 3 σχήματα που είναι σχεδιασμένα στο φύλλο εργασίας έχει μεγαλύτερο εμβαδόν. Τα παιδιά συνεργάζονται και προσπαθούν να μαντέψουν με το μάτι. Ο εκπαιδευτικός καλεί τα παιδιά να αιτιολογήσουν την άποψή τους. Στη συνέχεια τα παιδιά καλούνται να καλύψουν τα σχήματα χρησιμοποιώντας τα κομμάτια του Τάνγκραμ και να επιβεβαιώσουν ή να ανακατασκευάσουν την αρχική τους εκτίμηση. Το σχήμα 1 το καλύπτουν με 4 μεσαία τρίγωνα ή 8 μικρά τρίγωνα, το σχήμα 2 με 3 μικρά τρίγωνα και 2 πλάγια παραλληλόγραμμο ή 7 μικρά τρίγωνα και το 3 με 3 τετράγωνα και 1 μικρό τρίγωνο ή 7 μικρά τρίγωνα. Τα παιδιά μπορεί να βρουν και τρόπους κάλυψης με συνδυασμούς άλλων κομματιών του Τάνγκραμ. Ο εκπαιδευτικός καλεί τα παιδιά να ανακοινώσουν τις λύσεις και διαπιστώνεται ότι το σχήμα 1 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Η συζήτηση μπορεί να αναδείξει ότι μονάδα μέτρησης είναι το μικρό τρίγωνο καθώς η σύγκριση θα γίνει με βάση αυτό το τρίγωνο. Αυτή η διαπίστωση μπορεί να βοηθήσει στις συγκρίσεις εμβαδών στα επόμενα φύλλα εργασίας.

Και στη **σελίδα 16** δίνονται τρία σχήματα (τραπέζια) και καλούνται τα παιδιά να κάνουν μια αρχική εκτίμηση σχετικά με τα εμβαδά τους, να καλύψουν τα σχήματα με τα κομμάτια του

Τάνγκραμ και να επιβεβαιώσουν ή όχι την αρχική εκτίμηση. Τα τραπέζια 2 και 3 μπορούν να κατασκευαστούν εύκολα από τρία μεγάλα τρίγωνα του Τάνγκραμ και το 1 από 3 μεγάλα και 3 μικρά. Ακόμη κι αν τα παιδιά δεν εκφράσουν τα αποτελέσματα στην κοινή μονάδα μέτρησης, το μικρό τρίγωνο είναι εμφανές ότι το σχήμα με το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το 1.

Στη **σελίδα 17** τα παιδιά καλούνται να καλύψουν το σχήμα μιας υποτιθέμενης καμήλας με τα κομμάτια Τάνγκραμ. Η ύπαρξη πολλών γωνιών στο σχήμα ενδέχεται να δημιουργήσει δυσκολία στα παιδιά σε σχέση με τον τρόπο που θα τοποθετήσουν τα σχήματα που θα επιλέξουν. Θα πρέπει να αναπτύξουν κάποια στρατηγική την οποία καλό είναι να παρουσιάσουν στην τάξη. Για παράδειγμα, στο λαιμό που είναι στενός θα επιλεγούν μικρά κομμάτια, το μικρό τρίγωνο, ενώ στο σώμα μπορούν να μπουν μεγαλύτερα, τετράγωνα, μεσαία τρίγωνα κ.λπ. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει να εκφραστεί το εμβαδόν με βάση το μικρό τρίγωνο.

Στη **σελίδα 18** τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν το εμβαδόν μιας ακανόνιστης επιφάνειας με τη βοήθεια των κομματιών του Τάνγκραμ. Ουσιαστικά, τα παιδιά καλούνται να ανακαλύψουν “μη συμβατικούς” τρόπους υπολογισμού του εμβαδού ενός “μη συμβατικού” σχήματος. Διάφορες στρατηγικές μπορεί να ακολουθηθούν. Να χωρίσουν τα παιδιά το ακανόνιστο σχήμα σε μικρότερα σχήματα τα οποία μπορεί να καλύψουν ευκολότερα με κομμάτια του Τάνγκραμ. Να προσπαθήσουν να μετατρέψουν το σχήμα σε κανονικό και να δοκιμάσουν με τα μεγάλα τρίγωνα του Τάνγκραμ. Ότι στρατηγική κι αν ακολουθήσουν θα πρέπει να εκφράσουν το εμβαδόν με βάση τη μονάδα μέτρησης (μικρό τρίγωνο). Υπάρχει πιθανότητα να υπάρχουν αποκλίσεις από τις 28 μονάδες που είναι περίπου το εμβαδόν (7 μεγάλα τρίγωνα Χ 4). Ο εκπαιδευτικός θα συζητήσει με τα παιδιά πόσο μπορεί να είναι η απόκλιση, πιθανόν +/- ένα μικρό τρίγωνο.

Οι τρεις επόμενες δραστηριότητες (**σελίδες 19, 20 και 21**) περιλαμβάνουν τον πειραματισμό των παιδιών με τα κομμάτια του Τάνγκραμ προκειμένου να καλύψουν στην πρώτη περίπτωση το σχήμα μιας φάλαινας και στη δεύτερη το κεφαλαίο γράμμα E. Ανάλογη είναι και η τελευταία δραστηριότητα με τα Τάνγκραμ (σελ. 21) που περιλαμβάνει το πειραματισμό των παιδιών προκειμένου να δημιουργήσουν με τα κομμάτια του Τάνγκραμ συγκεκριμένα σχήματα αντικειμένων από τη καθημερινή τους ζωή, όπως για παράδειγμα μια γάτα ή ένα κερί. Η δυσκολία αυτών των εργασιών είναι αυξημένη, αντίστοιχα με εκείνες της σελίδας 6 με τα πεντόμινο για τους ίδιους λόγους.

## Δραστηριότητες στα κλάσματα με χρήση πολλαπλών μοντέλων αναπαράστασης

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει τη χρήση διαφόρων μοντέλων χειραπτικού υλικού με σκοπό την εμπλοκή των παιδιών σε δραστηριότητες σχετικές με την έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα, τα κλασματικά μέρη και η σχέση μέρους όλου διερευνώνται μέσα από δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση κάθε διαθέσιμου διδακτικού μοντέλου. Στις δραστηριότητες που ακολουθούν η εμπειρία των παιδιών με την επικάλυψη σχημάτων με τα κομμάτια του Τάνγκραμ αξιοποιείται για τη μελέτη των κλασμάτων.

Τα pattern blocks είναι μια συλλογή από επίπεδα σχήματα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την κάλυψη επιφανειών (ψηφιδωτά) και για τη διδασκαλία των κλασματικών εννοιών. Συγκεκριμένα, δίνονται στα παιδιά ένα τρίγωνο, ένα τραπέζιο και ένας ρόμβος προκειμένου να τα χρη-

σιμοποιήσουν για να καλύψουν ένα κανονικό εξάγωνο. Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν είτε 6 ισόπλευρα τρίγωνα είτε 2 τραπέζια είτε 3 ρόμβους για καλύψουν το κανονικό εξάγωνο. Τα παιδιά αφού πειραματιστούν με τα μικρότερα σχήματα καλούνται να συμπληρώσουν τον απαιτούμενο αριθμό από κάθε σχήμα για την κάλυψη του εξαγώνου. Επιπλέον, πρέπει να υπολογίσουν και να καταγράψουν τι μέρος του εξαγώνου καλύπτει καθένα από τα σχήματα αυτά. Δίνονται στα παιδιά 5 ίδιοι πίνακες για να καταγράψουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς σχημάτων για την κάλυψη του εξαγώνου. Για παράδειγμα, ένα δυνατός συνδυασμός μπορεί να είναι 1 τραπέζιο, 1 ρόμβος και 1 ισόπλευρο τρίγωνο. Σε κάθε περίπτωση τα παιδιά θα καταγράφουν τον αριθμό των σχημάτων και το μέρος του εξαγώνου που καλύπτουν. Για το παράδειγμα που μόλις αναφέραμε το 1 τραπέζιο καλύπτει το  $\frac{1}{2}$  του εξαγώνου, το 1 ισόπλευρο τρίγωνο καλύπτει το  $\frac{1}{6}$  του εξαγώνου και ο 1 ρόμβος το  $\frac{1}{3}$  του εξαγώνου. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να θέσει διερευνητικές ερωτήσεις με στόχο τη μελέτη της σχέσης μέρους-όλου αλλά και της σχέσης μεταξύ των σχημάτων μέσα από τη μελέτη των κλασμάτων που εκφράζουν για τη δημιουργία του όλου (εξαγώνου). Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να θέσει διερευνητικές ερωτήσεις σχετικά με την ισοδυναμία των κλασμάτων.

Στη συνέχεια στη **σελίδα 24** παρουσιάζεται ένα δέντρο σχηματισμένο από τα τρίγωνα και τους ρόμβους και το τραπέζιο της προηγούμενης δραστηριότητας. Αξιοποιείται η εμπειρία και η μελέτη των παιδιών από την προηγούμενη δραστηριότητα και ουσιαστικά καλούνται να αναπτύξουν και να διερευνήσουν τη σχέση που έχουν τα σχήματα αυτά (τρίγωνο, ρόμβος και τραπέζιο) μεταξύ τους όσον αφορά την επιφάνεια του καθενός. Το τραπέζιο σχηματίζεται από 3 τρίγωνα ή 1 ρόμβο και 1 τρίγωνο, ενώ ο ρόμβος σχηματίζεται από 2 τρίγωνα. Το παιδί καλείται μέσα από τη μελέτη του σχήματος (δέντρου) να ανακαλύψει τις σχέσεις αυτές προκειμένου να απαντήσει στις ερωτήσεις που του τίθενται. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να θέτει διερευνητικές ερωτήσεις που θα στοχεύουν την ανακάλυψη αξιοποιώντας την εμπειρία των παιδιών από την προηγούμενη ενότητα. Τα παιδιά προκειμένου να υπολογίσουν τι μέρος του δέντρου είναι ο κορμός του και τα κλαδιά του θα οδηγηθούν στην αναγκαιότητα τεμαχισμού του δέντρου με μια κοινή μονάδα (τρίγωνο). Θα ανακαλύψουν ότι όλο το δέντρο αποτελείται από 13 τρίγωνα και ο κορμός του είναι τα  $\frac{4}{13}$  ενώ τα κλαδιά του είναι τα  $\frac{9}{13}$ .

Αντίστοιχη είναι και η επόμενη δραστηριότητα της **σελίδας 25**, όπου το εξάγωνο, το τρίγωνο και ο ρόμβος χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθεί ένα λουλούδι. Τα παιδιά καλούνται να συσχετίσουν τα σχήματα μεταξύ τους και να υπολογίσουν τι μέρος του λουλουδιού είναι το κοτσάνι και τι μέρος του λουλουδιού έχει απομείνει όταν έχουν πέσει τα πέταλα του λουλουδιού. Τα παιδιά καλούνται ουσιαστικά να συσχετίσουν το τρίγωνο με τα άλλα δύο σχήματα (ρόμβος και εξάγωνο) και να μετατρέψουν όλα τα σχήματα στο απλούστερο τρίγωνο, προκειμένου να υπολογίσουν τα μέρη του λουλουδιού τα οποία αποτελούνται από διαφορετικά σχήματα.

Η δραστηριότητα που ακολουθεί στη **σελίδα 26** περιλαμβάνει ένα πάτωμα που αποτελείται από εξάγωνα, τρίγωνα και ρόμβους. Τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν τι μέρος του πατώματος είναι όλα τα εξάγωνα, όλα τα τρίγωνα και όλοι οι ρόμβοι μαζί κάθε φορά. Τα παιδιά αναμένεται να προβληματιστούν κάθε φορά καθώς πρέπει πάλι να συσχετίσουν το εξάγωνο, το ρόμβο και το τρίγωνο και να εκφράσουν το όλο (σύνολο) με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά. Θα

μπορούσαν να χωρίσουν το πάτωμα σε τρίγωνα (44) και να εκφράσουν κάθε εξάγωνο ως έξι τρίγωνα και κάθε ρόμβο ως 2 τρίγωνα.

Η δραστηριότητα της **σελίδας 27** απαιτεί την ίδια στρατηγική στο πρώτο μέρος όπου τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν τι μέρος του πατώματος καλύπτουν τα σπασμένα πλακάκια. Στο δεύτερο μέρος όμως όπου ζητείται από τα παιδιά να προτείνουν τρόπους αλλαγής των δύο σπασμένων ρόμβων με τα πλακάκια που έχουν περισσέψει η δραστηριότητα γίνεται ανοικτή καθώς μπορούν να ακολουθήσουν διάφορους συνδυασμούς.

Στην επόμενη ενότητα χρησιμοποιείται ο γεωπίνακας ως διδακτικό υλικό για την εμπλοκή των παιδιών σε δραστηριότητες που αναφέρονται στην έννοια του κλάσματος. Ο γεωπίνακας αποτελεί ένα μοντέλο περιοχής ή εμβαδού καθώς μία επιφάνεια ή περιοχή στο γεωπίνακα μπορεί υποδιαιρείται σε μικρότερα μέρη και κάθε μέρος μπορεί να συγκριθεί με το όλο.

Στη δραστηριότητα της **σελίδας 28** τα παιδιά καλούνται να χρησιμοποιήσουν τους γεωπίνακες και να κατασκευάσουν το σχήμα που αναπαριστάνεται στην εικόνα με τα λαστιχάκια και κατόπιν να δείξουν τα  $\frac{2}{3}$ , το  $\frac{1}{4}$  των  $\frac{2}{3}$  του σχήματος. Τα παιδιά εμπλέκονται ευχάριστα καθώς καλούνται να κάνουν μίξεις χρωμάτων αλλά ταυτόχρονα τους ζητά να υπολογίσουν τι μέρος του αρχικού σχήματος είναι το  $\frac{1}{4}$  των  $\frac{2}{3}$  του. Τα παιδιά με τη χρήση του γεωπίνακα (μοντέλο περιοχής ή εμβαδού) θα βοηθηθούν να ανακαλύψουν ότι το αρχικό σχήμα (ορθογώνιο  $4 \times 3$ ) έχει χωριστεί σε 12 τετραγωνάκια και η επιφάνεια με τη μείξη των χρωμάτων αποτελεί τα  $\frac{2}{12}$  του αρχικού σχήματος.

Η δραστηριότητα της **σελίδας 29** περιλαμβάνει εκτός από την έννοια του κλάσματος ως μέρος-όλο μέσα από το μοντέλο περιοχής ή εμβαδού και την έννοια του μετασχηματισμού. Τα παιδιά προκειμένου να υπολογίσουν τι μέρος του γεωπίνακα είναι χαρταετός, θα πρέπει να μετασχηματίσουν το χαρταετό σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ( $1 \times 4$ ). Ο γεωπίνακας ουσιαστικά προσφέρει τη δυνατότητα στα παιδιά να φανταστούν τις διαγώνιους του χαρταετού και να αντιληφθούν ότι έτσι το σχήμα χωρίζεται σε 2 ζεύγη ίσων ορθογωνίων τριγώνων. Μέσα από τη νοερή μεταφορά και περιστροφή των τριγώνων θα δημιουργηθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων  $1 \times 5$ . Στη συνέχεια βασιζόμενοι και στην προηγούμενη εμπειρία τους δε θα δυσκολευτούν να αντιληφθούν πως το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι το  $\frac{1}{4}$  του γεωπίνακα ή τα  $\frac{4}{16}$  του γεωπίνακα.

Η επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 30** περιλαμβάνει τη δημιουργία από τα παιδιά του σχεδίου της καμηλοπάρδαλης που παρουσιάζεται με τη χρήση δύο γεωπινάκων. Στη συνέχεια τα παιδιά καλούνται να σχεδιάσουν τη καμηλοπάρδαλη σε δύο γεωπίνακες και να υπολογίσουν τι μέρος της καμηλοπάρδαλης αποτελούν τα διάφορα μέρη του σώματος της.

Στη **σελίδα 32** τα παιδιά καλούνται να διακοσμήσουν το παιδικό δωμάτιο τοποθετώντας τα διάφορα έπιπλα που τους δίνονται. Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη δική τους στρατηγική αρκεί να λάβουν υπόψη τους το μέρος της επιφάνειας που θα καλύπτει το κάθε έπιπλο. Αποτελεί μια δημιουργική δραστηριότητα όπου τα παιδιά καλούνται να καλύψουν μέρη της επιφάνειας με τα έπιπλα και να υπολογίσουν το μέρος της επιφάνειας που έχει μείνει ελεύθερο από έπιπλα.

Στη **σελίδα 33** παρουσιάζεται το μοντέλο μήκους στα κλάσματα με στόχο την ανάπτυξη από τα παιδιά της έννοιας των κλασματικών μερών. Εδώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ράβδοι του Cuisenaire. Συγκεκριμένα δίνεται ένας μεγαλύτερος πίνακας (λωρίδα μήκους) και τρεις μικρότεροι. Τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν τι μέρος του μεγαλύτερου πίνακα είναι το μισό και το διπλάσιο του κάθε μικρότερου.

Η επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 34** στοχεύει και αυτή στην οικοδόμηση της έννοιας των κλασματικών μερών του συνόλου, δηλαδή τα μέρη που προκύπτουν όταν το σύνολο έχει διαμεριστεί σε ισομεγέθη τμήματα ή δίκαια μερίδια.

Η δραστηριότητα της **σελίδας 35** περιλαμβάνει τη χρήση λωρίδων μέσα σε πλαίσιο-ιστορία, όπου το παιδί καλείται να εμπλακεί και να ανακαλύψει τα κλασματικά μέρη που λείπουν προκειμένου να συμπληρώσει το ολόκληρο. Επιπλέον η δραστηριότητα επεκτείνοντας την αναζήτηση καλεί τα παιδιά να συσχετίσουν τα διαφορετικά κλασματικά μέρη και να ανακαλύψουν ισοδυναμίες κλασμάτων.

Με τη δραστηριότητα της **σελίδας 36** δίνονται στα παιδιά κλασματικά μέρη και ζητείται να ανακαλύψουν το ολόκληρο χρησιμοποιώντας μοντέλα εμβαδού όπως είναι τα Τάνγκραμ.

Με τη μελέτη των κλασματικών μερών ασχολείται και η επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 37**, που περιλαμβάνει πάλι ένα μοντέλο εμβαδού καθώς παρουσιάζει μια γάτα σχεδιασμένη από γεωμετρικά σχήματα (ισόπλευρα τρίγωνα δύο μεγεθών και ένα παραλληλόγραμμο). Τα παιδιά ουσιαστικά καλούνται να συσχετίσουν τα σχήματα μεταξύ τους, να διαιρέσουν τα μεγαλύτερα σχήματα και να κατασκευάσουν τα κλασματικά μέρη. Το ενδιαφέρον σε αυτή τη δραστηριότητα είναι ότι υπάρχουν διάφορα μέρη του σώματος δεν αντιπροσωπεύουν κλασματικές μονάδες όπως τα αυτά αλλά πρέπει να διαιρεθούν σε κλασματικές μονάδες.

Η δραστηριότητα στη **σελίδα 38** περιλαμβάνει την εμπλοκή των παιδιών στην αναζήτηση τόσο της κλασματικής μονάδας όσο και του όλου. Συγκεκριμένα τους δίνεται μια μισοτελειωμένη καρίνα карабиού όπου έχουν κατασκευαστεί τα  $\frac{2}{3}$  της και τα παιδιά θα πρέπει να την ολοκληρώσουν και να εκφράσουν σε κλάσμα το μέρος της καρίνας που θα σχεδιάσουν.

Το μοντέλο του εμβαδού χρησιμοποιείται και στη επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 39**. Το παιδί με τη βοήθεια του Τάνγκραμ θα πρέπει να αναπαραστήσει τα δύο μοναδιαία κλάσματα που του δίνονται ( $\frac{1}{3}$  και  $\frac{1}{2}$ ) και ταυτόχρονα να κατασκευάσει την απαραίτητη κλασματική μονάδα προκειμένου να εκφράσει τι μέρος του λαχανόκηπου είναι η περιοχή που έχουν φυτέψει τα μαρούλια.

Η δραστηριότητα στη **σελίδα 40** αποτελεί ουσιαστικά μια εισαγωγή στα ποσοστά (%). Παρουσιάζονται δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η μία είναι ένα βαρέλι που χωράει 100 λίτρα λάδι και είναι γεμάτο κατά το  $\frac{1}{4}$  και η άλλη αναπαράσταση είναι 100 μικρά τετράγωνα που είναι διατεταγμένα σε έναν πίνακα 10 x 10 και κάθε τετράγωνο αναπαριστά ένα δοχείο τους ενός λίτρου. Τα παιδιά καλούνται να συσχετίσουν τις δύο αναπαραστάσεις και να σημειώσουν σε πόσα δοχεία του ενός λίτρου αντιστοιχεί το λάδι που βρίσκεται μέσα στο βαρέλι. Καλούνται ουσιαστικά να εκφράσουν την κλασματική μονάδα  $\frac{1}{4}$  που χρησιμοποιείται στο μοντέλο του βαρελιού στον

πίνακα με τα 100 δοχεία. Πιθανόν τα παιδιά αναμένουμε να χωρίσουν τον τετράγωνο πίνακα σε τέσσερα ίσα μέρη και να σημειώσουν τα 25 δοχεία που αντιστοιχούν.

Ο πίνακας  $10 \times 10$  χρησιμοποιείται και στη **σελίδα 41** όπου τα παιδιά πρέπει να ολοκληρώσουν το σχέδιο της πεταλούδας και να υπολογίσουν τι μέρος του πίνακα καλύπτουν τα φτερά της. Εδώ εισάγεται η κλασματική μονάδα  $\frac{1}{100}$  και τα παιδιά θα πρέπει να κάνουν κάποιους μετασχηματισμούς (δύο μισά τετράγωνα να τα υπολογίσουν ως ένα) προκειμένου να υπολογίσουν το κλασματικό μέρος. Στη συνέχεια το κλασματικό μέρος τους ζητείται να το εκφράσουν και ως κλάσμα της δεκαδικής βάσης και ως δεκαδικό και ως ποσοστό (%).

Στην επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 42** τα παιδιά καλούνται να μελετήσουν τη σχέση μέρους-όλου μέσα από ένα μοντέλο εμβαδού, όπου η κλασματική μονάδα που θα χρησιμοποιηθεί παρουσιάζεται μέσα από τη χρήση ενός πίνακα  $10 \times 10$ . Συγκεκριμένα τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν το μέρος του χαλιού που είναι κόκκινο αφού πρώτα έχουν ξανασχεδιάσει το χαλί σε έναν τετράγωνο καμβά σχεδίασης που είναι χωρισμένος σε 100 τετράγωνα. Τα παιδιά με αυτόν τον τρόπο οδηγούνται να χρησιμοποιήσουν ως κλασματική μονάδα το  $\frac{1}{100}$  και να εκφράσουν το κλασματικό μέρος και ως δεκαδικό κλάσμα και ως δεκαδικό αριθμό και ως ποσοστό (%).

Στη **σελίδα 43** παρουσιάζεται το μοντέλων των κυκλικών δίσκων ως ρόδες των ποδηλάτων προκειμένου να εκφράσουν τα παιδιά το χρωματισμένο μέρος ως ποσοστό (%). Μολονότι τα κλασματικά μοντέλα είναι εν δυνάμει δεκαδικά μοντέλα το  $\frac{1}{8}$  είναι δύσκολο να εκφραστεί σε ποσοστό (%). Στη συνέχεια καλούνται τα παιδιά να ζωγραφίσουν το 50% και 75% του κάθε τροχού. Η όλη δραστηριότητα βασίζεται στην ιδέα των φιλικών δεκαδικών κλασμάτων. Μολονότι το  $\frac{1}{4}$ , το  $\frac{1}{2}$  και τα  $\frac{3}{4}$  είναι εύκολο να αναζητηθούν σε ένα κυκλικό δίσκο με 8 κομμάτια, το  $\frac{1}{8}$  αποτελεί μια πρόκληση καθώς φαίνεται αδύνατο για τα παιδιά.

Στη **σελίδα 44** παρουσιάζεται η αναπαράσταση ενός μοντέλου εμβαδού όπου σε ένα ορθογώνιο  $10 \times 5$  περικλείει ένα μικρότερο  $6 \times 3$ . Τα παιδιά καλούνται να ζωγραφίσουν το μικρότερο (εσωτερικό) ορθογώνιο και να εκφράσουν το μέρος του μεγαλύτερου ορθογωνίου που έχει ζωγραφιστεί. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να παροτρύνει τα παιδιά να εκφράσουν το μέρος που ζωγράρισαν και με τους τρεις τρόπους (κλάσμα, δεκαδικό, ποσοστό).

Αντίστοιχη είναι και η δραστηριότητα στη **σελίδα 45**. Το μοντέλο του εμβαδού εκφράζεται μέσα από ένα τετράγωνο  $5 \times 5$  το οποίο είναι χωρισμένο σε μικρότερα μοναδιαία τετράγωνα τα οποία είναι χωρισμένα με τις διαγώνιους τους. Παρουσιάζεται έτσι ένα ψηφιδωτό που αποτελείται από 100 ίσα ισοσκελή τρίγωνα. Τα παιδιά καλούνται να ζωγραφίσουν το χαλί αυτό χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά τρίγωνα και να συμπληρώσουν τον πίνακα εκφράζοντας το μέρος του χαλιού που καλύπτει το κάθε χρώμα σε κλάσμα, δεκαδικό κλάσμα, δεκαδικό αριθμό και ποσοστό.

Στη **σελίδα 46** δίνονται στα παιδιά τρία διαφορετικά κλάσματα τα δύο από τα οποία είναι δεκαδικά και αρχικά τους ζητείται να τα συγκρίνουν. Τα παιδιά θα πρέπει να βασιστούν στην προηγούμενη εμπειρία τους με το πλέγμα  $10 \times 10$  προκειμένου να μετατρέψουν τα γνωστά τους κλάσματα σε δεκαδικά και το αντίστροφο. Έτσι, μια πιθανή στρατηγική σύγκρισης των κλασμά-

των  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{50}{100}$  και  $\frac{2}{10}$  θα ήταν να μετατρέψουν τα  $\frac{50}{100}$  σε  $\frac{1}{2}$  και τα  $\frac{2}{10}$  σε  $\frac{1}{5}$  και να κάνουν εύκολα τη σύγκριση των κλασμάτων ή, αντίστροφα, να τα μετατρέψουν το  $\frac{1}{4}$  σε  $\frac{25}{100}$  και τα  $\frac{2}{10}$  σε  $\frac{20}{100}$ . Η τελευταία προσέγγιση θα μπορούσε να ελεγχθεί με τη χρήση του πλέγματος  $10 \times 10$  που ούτως ή άλλως δίνεται προκειμένου να ζωγραφίσουν τα παιδιά τις θέσεις των φρούτων.

Το μοντέλο τους πλέγματος  $10 \times 10$  χρησιμοποιείται και στη δραστηριότητα της **σελίδας 47** όπου τα παιδιά καλούνται να εκφράσουν μέρη του πλέγματος που έχουν καλυφτεί με χορτοτάπητα σε μορφή κλάσματος και ποσοστό (%). Επιπλέον καλούνται τα παιδιά να φανταστούν ένα διπλάσιο πλέγμα, να υπολογίσουν τα μέρη που θα κάλυπταν με χορτοτάπητα και να τα εκφράσουν σε μορφή κλάσματος και ποσοστού %.

Η δραστηριότητα στη **σελίδα 48** είναι μια σύνθετη δραστηριότητα που χρησιμοποιεί το μοντέλο του εμβადού σε συνδυασμό με το μοντέλο του πλέγματος  $10 \times 10$ . Παρουσιάζονται στα παιδιά τα αναπτύγματα δύο χάρτινων τετάρων ενός τετράγωνου τετάρου  $3 \times 3$  και ενός ορθογώνιου  $2 \times 3$ . Τα παιδιά χρησιμοποιώντας το πλέγμα  $10 \times 10$  ως χαρτί σχεδίασης καλούνται να σχεδιάσουν όσο το δυνατόν περισσότερα τετάρα και να αποφασίσουν ποιο είδος τετάρου θα πρέπει να προτιμηθεί προκειμένου να περισσέψει όσο το δυνατόν λιγότερο χαρτί σχεδίασης. Τέλος τα παιδιά πρέπει να καταγράψουν πόσα τετάρα σχεδίασαν και ποιου σχήματος και να εκφράσουν σε μορφή κλάσματος το μέρος του χαρτιού που χρησιμοποιήθηκε και το μέρος του χαρτιού που περίσσεψε. Η αυθόρμητη απάντηση που αναμένουμε από τα παιδιά είναι ότι επιλέγοντας το ορθογώνιο τετάρο θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε περισσότερα τετάρα αλλά μέσα από τον πειραματισμό θα διαπιστώσουν ότι η κατάλληλη επιλογή είναι το τετράγωνο τετάρο καθώς με τα 4 τετάρα που θα σχεδιαστούν καλύπτεται σχεδόν όλο το πλέγμα  $10 \times 10$  αφήνοντας  $4 \times 4 = 16$  τετραγωνάκια ακάλυπτα.

Στην **σελίδα 49** εισάγεται για το Επίπεδο 3 η έννοια του κλάσματος ως αναλογία. Τα παιδιά καλούνται να σχεδιάσουν τρίγωνα και τετράγωνα στην ουρά του χαρταετού έτσι ώστε να διατηρείται η αναλογία τετράγωνα προς τρίγωνα ίσον 2. Τα παιδιά θα πρέπει να ενθαρρύνονται στην ανάπτυξη αρχικά διαισθητικών μεθόδων για την επίλυση των αναλογιών. Μια αναλογία δηλώνει την ισότητα ανάμεσα σε δύο λόγους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο λόγος των τετραγώνων προς τα τρίγωνα ισούται με 2 προς 1. Δηλαδή για κάθε ένα τετράγωνο θα υπάρχουν δύο τρίγωνα.

Η δραστηριότητα στη **σελίδα 50** στοχεύει στην ανάπτυξη της έννοιας του λόγου. Οι λόγοι μπορούν να αποτελούν σύγκριση μέρους ενός όλου προς ένα άλλο μέρος. Στην περίπτωση του καλαμιού ο λόγος του μήκους προς την πετονιά είναι 1 προς 8, δηλαδή αν υποθέσουμε ότι το όλο είναι το καλάμι και η πετονιά μαζί ο λόγος 1 προς 8 αποτελεί σύγκριση του μήκους του καλαμιού προς το μήκος της πετονιάς. Η πετονιά δηλαδή είναι 8 φορές μεγαλύτερη από το καλάμι το οποίο έχει μήκος 5 μ.





## Δραστηριότητες με το γεωπίνακα

Η επόμενη ενότητα δραστηριοτήτων περιλαμβάνει τη χρήση του διδακτικού μοντέλου του γεωπίνακα και στοχεύει στην μελέτη της έννοιας του εμβαδού μέσα από την κατασκευή και τη συσχέτιση επιπέδων σχημάτων (ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τετράγωνα, πλάγια παραλληλόγραμμα).

Στην πρώτη από αυτές τις δραστηριότητες στη **σελίδα 51** τα παιδιά καλούνται να σχεδιάσουν σε οκτώ γεωπίνακες όσο το δυνατόν περισσότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και να υπολογίσουν το εμβαδόν τους χρησιμοποιώντας την τετραγωνική μονάδα που τους παρουσιάζεται στο εισαγωγικό γεωπίνακα. Ο κάθε γεωπίνακας είναι τετράγωνος και έχει εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες. Τα παιδιά είναι δυνατόν να φτιάξουν 6 ορθογώνια όπου οι διαστάσεις του με μονάδα μέτρησης την πλευρά της τετραγωνικής μονάδας είναι  $(2 \times 1, 3 \times 1, 3 \times 2, 4 \times 1, 4 \times 2$  και  $4 \times 3)$  και δύο ορθογώνια με διαστάσεις  $(2 \times 1$  και  $3 \times 1)$  με μονάδα μέτρησης όμως την διαγώνιο της τετραγωνικής μονάδας. Επίσης θα μπορούσε να συζητηθεί αν το τετράγωνο  $4 \times 4$  είναι και αυτό ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμα, με περισσότερες βέβαια ιδιότητες από ότι τα πιο 'συνηθισμένα'. Τα παιδιά αναμένεται αρχικά να ανακαλύψουν και να σχεδιάσουν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με προσανατολισμό κάθε το ή οριζόντιο όπου το εμβαδόν τους είναι εύκολο να υπολογιστεί. Ο εκπαιδευτικός όμως θα πρέπει να τους παροτρύνει να ανακαλύψουν και τα ορθογώνια με διαγώνιο προσανατολισμό όπου η μονάδα μέτρησης του μήκους των πλευρών είναι διαφορετική αλλά το εμβαδόν τους θα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την κοινή μονάδα μέτρησης (τετραγωνική μονάδα). Αξιοποιώντας την προηγούμενη εμπειρία τους με τα κλάσματα και το διαμερισμό των μερών μιας επιφάνειας τα παιδιά παροτρύνονται να ανακαλύψουν ότι η διαγώνιος διχοτομεί το τετράγωνο και μπορούν έτσι να υπολογίσουν το εμβαδόν των ορθογωνίων με μη συμβατικό προσανατολισμό. Η δραστηριότητα προσφέρει στα παιδιά την δυνατότητα να μελετήσουν και να κατασκευάσουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαφορετικό προσανατολισμό από το συνήθη που αντιμετωπίζουν στα πλαίσια μιας παραδοσιακής προσέγγισης.

Η επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 53** περιλαμβάνει επίσης το μοντέλο του γεωπίνακα και την τετραγωνική μονάδα μέτρησης. Τα παιδιά καλούνται να μελετήσουν και να κατασκευάσουν ισεμβαδικά σχήματα. Συγκεκριμένα τους ζητείται να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμα και ένα τετράγωνο που να έχουν το ίδιο εμβαδόν. Τα παιδιά αξιοποιώντας την εμπειρία τους από την προηγούμενη δραστηριότητα όπου είχαν κατασκευάσει όλα τα δυνατά ορθογώνια παραλληλόγραμμα και είχαν υπολογίσει και το εμβαδόν τους θα συσχετίσουν τα ισεμβαδικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα με τα αντίστοιχα τετράγωνα. Θυμίζουμε ότι στο Επίπεδο 2 υπάρχουν δραστηριότητες που ζητούν την εύρεση όλων των τετραγώνων (σελίδες 11 και 12).

Στην επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 55** τα παιδιά στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν το πλάγιο παραλληλόγραμμα με το μικρότερο εμβαδόν οδηγούνται να συσχετίσουν το πλάγιο παραλληλόγραμμα με το τετράγωνο που είναι και η μονάδα μέτρησης. Μέσα από την

εξερεύνηση αυτής της σχέσης θα οδηγηθούν στον μετασχηματισμό του πλάγιου παραλληλόγραμμου προσκειμένου να είναι σε θέση να υπολογίσουν το εμβαδόν του κάθε σχήματος.

Στην τελευταία δραστηριότητα της ενότητας αυτής στη **σελίδα 57** δίνεται η δυνατότητα στα παιδιά να συσχετίσουν τα τρία διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα (πλάγιο παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τετράγωνο) μέσα από την μελέτη και τον υπολογισμό του εμβαδού τους. Στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν ισεμβαδικά πλάγια και ορθογώνια παραλληλόγραμμο μελετούν και τους μετασχηματισμούς των σχημάτων σε σχέση με την τετραγωνική μονάδα.

## Προβλήματα με σχήματα, λόγια και αριθμούς

Οι δραστηριότητες στις **σελίδες 59** και **60** περιλαμβάνουν μοντέλα εμβαδού ή περιοχής τα οποία είναι υποδιαιρεμένα σε μικρότερα μέρη και το παιδί καλείται να σκιαγραφήσει το κλασματικό μέρος που του ζητείται κάθε φορά. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως δραστηριότητα εμπέδωσης και λιγότερο ανακάλυψης καθώς κάθε σχήμα είναι χωρισμένο σε μικρότερα ίσα μέρη και το παιδί αρκεί να δείξει τα κλασματικά μέρη που αναφέρονται στο κάθε κλάσμα.

Οι δραστηριότητες στις **σελίδες 61** και **62** περιλαμβάνουν την χρήση υλικών από την καθημερινή ζωή και στοχεύουν στην ανάπτυξη της έννοιας του όγκου μέσα από καταστάσεις της καθημερινότητας όπου η χρήση όρων όπως το πάχος ή σε κάποιες φορές το ύψος δηλώνουν την έννοια της τρίτης διάστασης. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται αντικείμενα της καθημερινής ζωής (κέρμα, καρτέλες, φύλο χιλιοστομετρίου χαρτιού, σελίδα τετραδίου, σπάγκος) τα οποία αντιμετωπίζονται πολλές φορές από τα παιδιά ως δυσδιάστατα σχήματα (επίπεδα) ή ακόμα και μονοδιάστατα όπως γίνεται στην περίπτωση του σπάγκου. Κάτι τέτοιο συμβαίνει γιατί δεν είναι οπτικά εμφανής η διάσταση των αντικειμένων αυτών που τα καθιστά τρισδιάστατα. Τα παιδιά λοιπόν σε αυτήν τη ενότητα εμπλέκονται σε δραστηριότητες προκειμένου να εξερευνήσουν τα αντικείμενα αυτά και να αντιληφθούν για παράδειγμα ότι το πάχος ενός φύλλου χαρτιού είναι δύσκολο να μετρηθεί αλλά η μέτρηση του πάχους 100 φύλλων μαζί είναι δυνατή.

Οι δραστηριότητες στις **σελίδες 63** και **64** περιλαμβάνουν την χρήση της αριθμομηχανής τσέπης (κομπιουτεράκι) και στοχεύουν στην ανάπτυξη από τα παιδιά στρατηγικών εκτίμησης σε διαιρέσεις όπου το πηλίκο είναι δεκαδικός αριθμός. Οι στρατηγικές εκτίμησης είναι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι οι οποίοι παράγουν αποτελέσματα κατά προσέγγιση. Είναι εποικοδομητικό για τα παιδιά να παρουσιάζει ο εκπαιδευτικός μια δραστηριότητα εκτίμησης και να διερευνά τις στρατηγικές και τις ιδέες που θα αναπτύξουν τα παιδιά σύμφωνα με το πνεύμα της καλλιέργειας των αυτοσχέδιων στρατηγικών. Στις δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στην ενότητα αυτή τα παιδιά καλούνται να κάνουν εκτιμήσεις για το πηλίκο των διαιρέσεων. Το κομπιουτεράκι χρησιμοποιείται για να βρουν με ακρίβεια το αποτέλεσμα των πράξεων και να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εκτιμήσεις τους.

Η επόμενη δραστηριότητα στη **σελίδα 65** είναι ένα παιχνίδι όπου καλούνται τα παιδιά να συμμετέχουν. Ο διδακτικός στόχος της δραστηριότητας είναι η εκμάθηση - εμπέδωση της προπαίδειας του πολλαπλασιασμού. Δίνεται ένας πίνακας στα παιδιά  $6 \times 6$  όπου οι αριθμοί από το 1 έως 36 είναι τοποθετημένοι σε τυχαίες θέσεις. Το παιχνίδι παίζεται με δύο παίκτες και κάθε παί-

κτης έχει στην κατοχή του 20 μάρκες διαφορετικού χρώματος από τον αντίπαλο. Οι παίκτες παίζουν εναλλάξ ρίχνοντας τα δύο ζάρια. Κάθε φορά πολλαπλασιάζουν τους αριθμούς που έφεραν τα ζάρια και τοποθετούν στο κελί του πίνακα που γράφει το γινόμενο του πολλαπλασιασμού μία μάρκα. Νικητής είναι ο παίκτης που θα έχει τοποθετήσει 3 από τις μάρκες του σε τρία συνεχόμενα κελιά της ίδιας γραμμής ή στήλης. Τα παιδιά με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα εξασκούνται στην προπαίδεια του πολλαπλασιασμού σε ένα ευχάριστο πλαίσιο όπου έχουν κίνητρο. Το κίνητρο στην εμπλοκή του παιδιού σε μια δραστηριότητα είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας που θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη εξίσου με τη δημιουργία ενός ευχάριστου πλαισίου της δραστηριότητας - παιχνίδι.

Οι δραστηριότητες στις **σελίδες 66** και **67** περιλαμβάνουν τη χρήση του υπολογιστή τσέπης για το έλεγχο των προβλέψεων-εκτιμήσεων των παιδιών. Δίνεται στα παιδιά ένα γινόμενο όπου λείπει ο δεύτερος παράγοντας του. Το παιδί καλείται να εκτιμήσει - προβλέψει τον δεύτερο παράγοντα και χρησιμοποιεί το κομπιουτεράκι για να ελέγχει τις εκτιμήσεις του. Στην στρατηγική εκτίμησης που παρουσιάζεται στα παιδιά περιλαμβάνεται η έννοια της σταδιακής προσέγγισης του αριθμού καθώς το παιδί βελτιώνει κάθε φορά την εκτίμησή του προσεγγίζοντας το αποτέλεσμα.

Η δραστηριότητα που ακολουθεί στη **σελίδα 68** αποτελεί ουσιαστικά είναι μια εφαρμογή των στρατηγικών εκτίμησης που ανέπτυξαν τα παιδιά στις προηγούμενες δραστηριότητες. Τα παιδιά καλούνται να κάνουν νοερά ή στο πλαίσιο χαρτί - μολύβι πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις συμμετέχοντας σε ένα παιχνίδι όπου επιπλέον πρέπει να ταξινομήσουν τα αποτελέσματα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

Στη **σελίδα 69** τα παιδιά εμπλέκονται σε μια σειρά από δραστηριότητες που περιλαμβάνουν την πρόσθεση δεκαδικών αριθμών, τη σύγκριση και ταξινόμησή τους. Η "τακτοποίηση" μιας λίστας δεκαδικών αριθμών από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο είναι μια δεξιότητα που δυσκολεύει τα παιδιά. Ορισμένα παιδιά σχηματίζουν την ιδέα ότι τα ψηφία στην άκρη δεξιά αντιπροσωπεύουν πολύ μικρούς αριθμούς και στη συνέχεια θεωρούν λανθασμένα τους αριθμούς με τα περισσότερα ψηφία μικρότερους. Τα λάθη αυτά αντικατοπτρίζουν την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης της δομής των δεκαδικών αριθμών. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα προσφέρει τη δυνατότητα στα παιδιά να αναπτύξουν μια αριθμητική αντίληψη για τους δεκαδικούς αριθμούς, να αντιληφθούν την αξία της θέσης του ψηφίου και το ρόλο της υποδιαστολής. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να δώσει μια φωτοτυπία της λίστας με τους δεκαδικούς αριθμούς έτσι ώστε να την κόψουν τα παιδιά και να πειραματιστούν.

Η δραστηριότητα στις **σελίδες 69** και **70** προσφέρει ένα ευχάριστο πλαίσιο-παιχνίδι για την εμπλοκή των παιδιών με τη χρήση του υπολογιστή τσέπης (κομπιουτεράκι) και στοχεύει στην κατανόηση της εννοιολογικής δομής των δεκαδικών αριθμών. Τα παιδιά συμμετέχοντας στο παιχνίδι αποκτούν ένα κίνητρο και καλούνται να καταστρώσουν την προσωπική τους στρατηγική προκειμένου να νικήσουν. Εκτιμώντας-προβλέποντας το αποτέλεσμα κάθε φορά αποφασίζουν, αν θα πολλαπλασιάσουν ή διαιρέσουν ζευγάρια δεκαδικών αριθμών και τοποθετούν το αποτέλεσμα των πράξεων που εκτελούν με το κομπιουτεράκι στην αριθμογραμμή. Μια τέτοια δραστηριότητα καλλιεργεί τις δεξιότητες της εκτίμησης των αριθμητικών πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς και της σύγκρισης δεκαδικών αριθμών καθώς και την αίσθηση της αξίας της θέσης του ψηφίου στους δεκαδικούς αριθμούς. Αποκτούν τα παιδιά με αυτό τον τρόπο μια αριθμητική αντίληψη για τους δεκαδικούς αριθμούς.

Οι επόμενες δραστηριότητες στις **σελίδες 71** και **72** αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα δραστηριοτήτων αξιοποίησης των δυνατοτήτων που μας παρέχει η αριθμομηχανή τσέπης στη δημιουργία ενός ευχάριστου διδακτικού περιβάλλοντος πλούσιου σε ευκαιρίες μάθησης. Με την εμπλοκή των παιδιών σε τέτοιου είδους δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση της αριθμομηχανής τσέπης, δίνεται η δυνατότητα ανάπτυξης της δεξιότητας της προσέγγισης, της αίσθησης της αξίας του ψηφίου, της εκτίμησης του αριθμητικού αποτελέσματος. Γενικότερα, τα παιδιά αναπτύσσουν μια καλύτερη αίσθηση σχετικά με την έννοια του αριθμού και τις αριθμητικές πράξεις. Δεν υπάρχει έντονος ο φόβος του λάθους της αριθμητικής πράξης αντίθετα δίνεται κίνητρο στα παιδιά να συμμετέχουν ενεργά και να πειραματίζονται με τους φυσικούς αριθμούς.

Τέλος, με τη δραστηριότητα στη **σελίδα 73** τα παιδιά καλούνται να πειραματιστούν με τη θέση των ψηφίων των αριθμών και να αντιληφθούν καλύτερα το θεσιακό σύστημα αρίθμησης και την αξία της θέσης των ψηφίων. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να δώσει φωτοτυπίες με τις κάρτες στα παιδιά προκειμένου να τις κόψουν και να πειραματιστούν.

## Βιβλιογραφία

- Bauersfeld, H. (1995). The Structuring of The Structures: Development and Function of Mathematizing as a Social Practice. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education* (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Confrey, J. (1995). How Compatible Are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education* (pp. 185-225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Markopoulos, C., & Potari, D. (1999). Forming Relationships in Three Dimensional Geometry Through Dynamic Environments. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3* (pp. 273-280). Haifa, Israel.
- Szendrei J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. London: Academic Press.



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ



ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ  
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



**Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ**  
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Εκπαίδευσης και Αρχικής  
Επαγγελματικής Κατάρτισης